Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2015

Iolanda da Silva Mourão Santos

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino dos Sistemas Lineares no 3º Ciclo do Ensino Básico

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2015

Iolanda da Silva Mourão Santos

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino dos Sistemas Lineares no 3º Ciclo do Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Paula Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e da Doutora Paula Carvalho, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president	Prof. Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	Prof. Doutor Paulo Alexandre Silva Pereira Professor Auxiliar da Universidade do Minho
	Prof. Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos / **acknowledgements**

"Ninguém escapa ao sonho de voar, de ultrapassar os limites do espaço onde nasceu, de ver novos lugares e novas gentes. Mas saber ver em cada coisa, em cada pessoa, aquele algo que a define como especial, um objecto singular, um amigo é fundamental. Navegar é preciso, reconhecer o valor das coisas e das pessoas, é mais preciso ainda!" (in *O Príncipezinho* de Antoine de Saint-Exupéry)

Assim, é com muita satisfação que expresso aqui o meu sentido reconhecimento a todos aqueles que contribuíram para que chegasse ao fim de mais uma etapa.

Agradeço aos meus amigos e familiares, aqueles que de uma forma ou de outra, direta ou indiretamente, me apoiaram e me transmitiram sempre palavras de força, coragem e persistência.

Quero destacar, neste caminho percorrido, a solicitude da Doutora Paula Oliveira e da Doutora Paula Carvalho às quais presto, aqui, o meu profundo agradecimento. Os seus conselhos e orientações foram preciosos para eu poder levar a bom porto este meu trabalho. O meu "Muito Obrigada".

Palavras Chave

Sistemas de equações, questões de escolha múltipla, exercícios parametrizados, recursos digitais, Sage Mathematics, MEGUA, SIACUA, Python, LaTeX

Resumo

As Tecnologias de Informação e Comunicação são, atualmente, poderosas ferramentas de trabalho às quais a escola, os professores e os alunos se têm vindo a aliar no sentido de melhorarem o ensino-aprendizagem. Neste trabalho, contextualizam-se as TIC em Portugal e, embora se destaque alguns riscos da sua utilização, salienta-se, sobretudo, a sua importância no ensino-aprendizagem e analisa-se a sua integração no programa de Matemática no Ensino Básico.

Por conseguinte, como este trabalho visa o estudo do tema “Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas” lecionado no 8º ano de escolaridade, enquadra-se o tema analisando a sua origem, a sua evolução ao longo dos anos na disciplina de Matemática e abordam-se os conteúdos teóricos relativos ao mesmo.

Este trabalho também objetivou a construção de recursos digitais, nomeadamente questões de escolha múltipla com as respetivas resoluções detalhadas. Por um lado, para criar estes exercícios parametrizados recorreu-se ao *software* Sage Mathematics, à linguagem de programação Python, ao processador de texto LaTeX e à plataforma MEGUA. Por outro lado, para a escolha de distratores plausíveis utilizou-se como base as dificuldades e os erros que os alunos evidenciam na resolução dos sistemas. Alguns dos exercícios foram disponibilizados na plataforma SIACUA onde qualquer utilizador registado os pode aceder.

Keywords

Systems of equations; multiple choice questions; parameterized exercises; digital resources; Sage Mathematics; MEGUA; SIACUA; Python; LaTeX

Abstract

At the present time, Information and Communication Technologies are powerful work tools for teachers, students and the all school to use as an ally to improve education and learning. In this work, we contextualize the Information and Communication Technologies in Portugal, and, although we highlight some risks of its use, we emphasize the importance of these technologies in the education and learning of today students and analyze their integration into the program of mathematics in basic education.

So, as the aim of this work is the study of the subject "Systems of two 1st degree equations with two incognitas", taught in 8th grade, we analyze this theme within its origin and evolution over the years in the discipline of mathematics and we approach the theoretical contents of the subject.

This work also aimed to create digital resources, including multiple-choice questions with the correspondent detailed resolutions. On one hand, to create these parameterized exercises we used Sage mathematics software, includind the MEGUA package (developed in University of Aveiro). The exercises were written in Latex and programmed using Python. On the other hand, for the choice of plausible distractors we have used the difficulties and mistakes that students demonstrated when solving systems. Some of the exercises are available on SIACUA platform, so that they can be accessed by any registered user.

Conteúdo

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

> "O homem não consegue descobrir novos oceanos se não tiver a coragem de perder de vista a costa."(André Gide)

A sociedade moderna caracteriza-se por frequentes processos de mudança que obrigam à reconversão e à aquisição de novas competências. Neste contexto, o ensino-aprendizagem implica uma constante atualização. A escola tem de se tornar mais aberta, mais articulada com o mundo, capaz de vencer as resistências à mudança. Por isso, o professor tem a seu cargo promover nos alunos competências que ultrapassam, nitidamente, o âmbito da sua formação académica inicial e se expandem até à formação humana e cívica.

Face ao exposto, no mundo contemporâneo, onde impera uma complexidade crescente das tarefas a realizar, com critérios de rapidez, utilidade e eficácia a respeitar, as tecnologias da informação e comunicação surgem, por todo o lado, como poderosas ferramentas de trabalho e de aprendizagem.

A visão das potencialidades existentes nas novas tecnologias não implica o menosprezo fundamentalista e radical em relação aos tradicionais meios de acesso à cultura. Por exemplo, televisão, rádio, cinema, teatro e livros terão sempre um importante papel a desempenhar na formação global dos indivíduos. Todos são complementares para a educação e formação dos cidadãos. Mas, a utilização das TIC tem a vantagem de propiciar aos seus utilizadores em geral a realização de tarefas e de aprendizagens sem estarem condicionados pelos horários rígidos e locais pré-definidos. Mais ainda: permite um novo paradigma de trabalho em termos individuais sem pôr em causa o trabalho colaborativo.

A educação não pode ficar estagnada nos tradicionais conteúdos e métodos. Assim, as TIC aparecem como um poderoso auxiliar, favorecendo, o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem e valores tais como: a socialização, a tolerância, o espírito colaborativo, a iniciativa, entre outros.

Posto isto, como o tema desta dissertação é *Recursos digitais de apoio ao estudo dos Sistemas Lineares no 3º ciclo do Ensino Básico*, este trabalho assentou em dois enfoques: as novas tecnologias que podem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem e a necessidade de diversificar material didático. Relativamente à organização desta dissertação, o propósito é contemplar três partes: a educação e as TIC em contexto escolar, o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas* lecionado atualmente no 8º ano de escolaridade e a construção dos recursos digitais, nomeadamente questões de escolha múltipla com as respetivas resoluções detalhadas.

Assim, no capítulo 2, contextualizam-se as TIC em Portugal, enumerando-se algumas iniciativas tecnológicas na educação desenvolvidas nas últimas décadas. De seguida, vinca-se a importância da sua utilização nas salas de aula embora, também, se alerte para alguns riscos. Posteriormente, analisa-se a integração das TIC no programa de Matemática no Ensino Básico e elencam-se alguns recursos educativos digitais na Internet onde, especificamente, se aprofunda um deles: as questões de escolha múltipla, uma vez que são parte integrante dos recursos digitais que foram construídos.

No capítulo 3, procura-se historiar a origem do tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas*, apresentando alguns elementos históricos do desenvolvimento de sistemas lineares. Além disto, analisa-se a sua origem e evolução ao longo dos anos concretamente na disciplina de matemática no 3º ciclo do ensino básico e abordam-se alguns conteúdos teóricos relativos ao tema. Por fim, enumeram-se as dificuldades e os erros que os alunos manifestam na aprendizagem de conteúdos matemáticos e os que envolvem, concretamente, o tema em estudo para posteriormente se utilizar alguns deles como base para a construção dos distratores (alternativas erradas) das questões de escolha múltipla.

Por fim, no capítulo 4 desta dissertação, explicita-se todo o processo de construção dos recursos digitais de apoio ao ensino dos *Sistemas Lineares* utilizando ferramentas inovadoras. Por conseguinte, descreve-se toda a tecnologia envolvida na construção dos mesmos: o *software* Sage Mathematics, a linguagem de programação Python, o processador de texto LaTeX e as plataformas MEGUA e SIACUA. Ainda neste capítulo evidencia-se o que é um exercício parametrizado e qual a sua composição.

É indiscutível que a taxa de insucesso escolar na área de matemática é extremamente elevada. Pode-se atribuir esta situação não apenas às dificuldades intrínsecas da disciplina, mas também a uma certa desmotivação dos alunos e à falta de pré-requisitos. Estes fatores são ainda agravados pelo défice de atenção e concentração e, finalmente, pela falta de métodos de trabalho e hábitos de estudo. Perante esta situação é imperioso que o professor implemente um ensino diferenciado de tal forma que proteja os alunos com mais dificuldade. Utilizar as TIC, uma vez que despertam a curiosidade dos alunos, garantem a motivação e podem facilitar a aprendizagem, além de permitir trabalhar, se necessário, fora do espaço tradicional da sala de aula e mesmo sem o papel interventor do professor.

Utilizar os recursos digitais, por um lado os professores podem tornar as suas aulas mais dinâmicas e eficazes com novas estratégias e experiências de aprendizagem, por outro lado os alunos podem estudar quando e onde quiserem, resolvendo diversos exercícios do mesmo tipo se necessário. Podem fazê-lo num ritmo próprio, gerindo a sua própria aprendizagem e repeti-los até terem a certeza que consolidaram os conhecimentos. Caso errem o exercício ou simplesmente não o saibam fazer, podem consultar as respetivas resoluções detalhadas, tornando-se assim uma mais valia para os alunos. No entanto, para que o ensino-aprendizagem seja eficiente salienta-se que deverá haver sempre um trabalho colaborativo entre professor e aluno.

Capítulo 2

A educação e as TIC em contexto escolar

As tecnologias da Informação e Comunicação são hoje omnipresentes, esbatem barreiras de comunicação entre pessoas e empresas e disponibilizam um conjunto quase infindável de conhecimentos e informações, para além de um mundo vasto de serviços.

Como refere Cornélia Castro [1] "Presentemente as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) assumem um papel preponderante na Sociedade da Informação e do Conhecimento uma vez que permitem diminuir a complexidade da aquisição, tratamento e troca de informação bem como as distâncias entre pessoas e organizações."

Por isso, hoje, não utilizar as tecnologias disponíveis representa um défice assinalável e muito limitador das tarefas e serviços a realizar.

As TIC contribuem para o acesso, divulgação e partilha da informação e do conhecimento, coadjuvam as pessoas no exercício da experimentação, instigam a criatividade e propiciam a construção de um pensamento próprio. Perante esta evolução tecnológica, a escola, os professores e os alunos têm vindo a aliar-se cada vez mais às TIC no sentido de melhorarem o processo de ensino-aprendizagem.

Neste capítulo, contextualizam-se as TIC em Portugal, ou seja, referenciam-se as iniciativas tecnológicas relacionadas com a educação que têm sido desenvolvidas em Portugal nas últimas décadas. De seguida, aborda-se a importância das TIC no ensino-aprendizagem, nomeadamente as vantagens da sua utilização em sala de aula, alertando para alguns aspectos menos positivos. Posteriormente, refere-se as TIC no programa de Matemática no Ensino Básico fazendo uma análise deste programa no que concerne ao uso das TIC. Por último, elencam-se alguns recursos educativos digitais na Internet e, no âmbito deste trabalho, aprofunda-se um deles: as questões de escolha múltipla.

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DAS TIC EM PORTUGAL

Em Portugal foram implementados inúmeros projetos, programas, iniciativas e medidas legislativas que contribuíram para o impulso das TIC no nosso país e para a sua inclusão formal no Sistema Educativo. Neste subcapítulo, são referenciados alguns deles.

Foi em meados de 1985 que se deu o início das políticas tecnológicas nas escolas do ensino básico e secundário, através de um projeto que trouxe mudanças ao nível da comunidade escolar introduzindo as TIC nas escolas, o conhecido projeto *MINERVA* (Meios Informáticos no Ensino: Racionalização, Valorização, Actualização) .

Este projeto esteve vigente até 1994, foi financiado pelo Ministério da Educação e gerido pelo GEP (Gabinete de Estudos e Planeamento) e o DEPGEF (Departamento de Programação e Gestão Financeira). Deu os seus contributos para o desenvolvimento de *software* educativo e para equipar as escolas com meios informáticos, promovendo o computador como ferramenta de trabalho na sala de aula, a formação de professores a nível tecnológico e a investigação sobre o uso das TIC.

Posteriormente, em 1996, desenvolveu-se o programa *Nónio Século XXI* (Programa de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação), pelo Ministério da Educação, com objetivos idênticos ao projeto anterior, mas também com o intuito de impulsionar a difusão da informação e a cooperação internacional. Este programa durou até meados de 2002.

Cerca de um ano mais tarde, ou seja, em 1997, avança a iniciativa *uARTE – Internet nas Escolas* (unidade de apoio à rede telemática educativa), lançada pelo Ministério da Ciência e Tecnologia que terminou em 2003. Esta iniciativa tinha como principal finalidade instalar um computador na biblioteca ou mediateca e ligar cada uma das escolas do ensino básico e secundário à Internet.

A partir de 2001, criaram-se centros de atribuição de *Diploma de Competências Básicas em TI*, cuja finalidade era, de acordo com o Decreto- Lei nº 140/2001 "favorecer a mais rápida familiarização da população portuguesa com as tecnologias da informação e o incremento acelerado e generalizado do uso da Internet na óptica do exercício da cidadania e na prossecução de uma estratégia de maior coesão social e de combate à info-exclusão".

Em 2002, surge o programa *Internet@EB1* da responsabilidade do Ministério da Ciência e da Tecnologia, da FCCN (Fundação para a Computação Científica Nacional) e das ESE (Escolas Superiores da Educação) destinado, essencialmente, a acompanhar a utilização da Internet nas escolas públicas do 1º ciclo do ensino básico.

Dando continuidade ao projeto anterior, entre 2005 e 2006, promovido pelo Ministério da Educação, através da Equipa Missão CRIE (Computadores, Redes e Internet na

Escola), nasceu o projeto *CBTIC@EB1* (Competências Básicas em TIC nas Escolas Básicas do 1º ciclo). Criaram-se redes entre escolas e dentro das escolas. Além disto, foram, igualmente, elaboradas atividades que envolviam a utilização dos computadores, redes e Internet e Centros de Recursos Virtuais.

Em 2007, é aprovado o *PTE* (Plano Tecnológico da Educação), cuja principal missão era posicionar Portugal entre os primeiros países europeus mais avançados em termos tecnológicos nas Escolas em 2010, e que incluía criar, desenvolver e executar iniciativas que integrassem a utilização de tecnologias e de recursos educativos digitais no ensino e na aprendizagem, bem como nos sistemas de gestão da escola. Segundo a legislação, na resolução do Conselho de Ministros nº 137/2007, era condição essencial a modernização tecnológica das escolas.

Conscientes das potencialidades das TIC no processo educativo, as estruturas do Ministério da Educação tomaram várias iniciativas. Assim, desde 2007 surgem programas tais como: o *e-escolinhas*, o *e-escolas* e o *e-professores*. O objetivo fundamental e comum a estes programas foi expandir as novas tecnologias a alunos e professores, desde o 1º ciclo. Nas iniciativas mencionadas estiveram envolvidos o Ministério da Educação, as operadores de comunicação TMN, Optimus e Vodafone e o Ministério das Obras Públicas, Transportes e Comunicações. De destacar aqui, o tão conhecido computador Magalhães, uma medida com enorme impacto na sociedade portuguesa.

Mais recentemente, em 2010, surge o projeto *Aprender e inovar com TIC*, financiado pelo Ministério da Educação (ME) através da DGIDC (Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular). A finalidade era dar apoio às escolas no que respeita à utilização educativa das tecnologias de informação e comunicação (TIC) e contribuir para um ensino inovador conducente à melhoria dos processos de ensino e aprendizagem.

Em suma, ao longo dos anos, em nome dos referidos programas, as entidades que a eles se associaram tiveram um dispêndio financeiro muito significativo dada a quantidade de equipamentos fornecidos, o seu custo unitário e o número significativo de estabelecimentos de ensino contemplados, mas contribuíram para que as escolas públicas fossem sendo equipadas com computadores, projetores multimédia, quadros interativos, ligações à Internet, etc..

Assim, em pleno século XXI, paralelamente ao saber académico e científico, as TIC têm vindo a assumir um papel cada vez mais preponderante.

Nos tempos que correm, já existe um incomensurável número de pessoas que acedem à Internet. Os chats, as videoconferências, a troca de emails, os fóruns de discussão, as plataformas de apoio à formação (e-learning) têm vindo a alterar as formas tradicionais de comunicação entre pessoas. Estas novidades são facilitadoras da comunicação, libertam as pessoas do conceito tradicional e estático de espaço e de tempo.

Tem-se vindo a assistir a mudanças muito significativas relativamente ao desenvolvimento das tecnologias e ao acesso às mesmas, bem como ao impacto crescente que têm vindo a exercer na vida dos cidadãos. Tendo em conta essa evolução, houve, há e continuará a haver, a necessidade de a escola se adaptar às mudanças, reformular os conteúdos e estratégias, bem como introduzir metodologias ativas de ensino-aprendizagem.

A implementação e expansão das novas tecnologias nas escolas implica que, de forma sistemática, sejam assumidos os seus contributos para o desenvolvimento das sociedades, das instituições, das pessoas e dos alunos em particular.

Para que todos os alunos, sem excepção, sem obstáculos geográficos, familiares e culturais, possam beneficiar das novidades tecnológicas e das suas vantagens tem de continuar a ser garantido às escolas um número indispensável de computadores. Ainda há muitas escolas com carências acentuadas destes equipamentos e, infelizmente, ainda persistem professores que resistem à sua utilização nas salas de aula, preferindo métodos tradicionais e arcaicos. Por isso, é necessário sensibilizar e continuar a formar, adequadamente, os professores capacitando-os para a introdução e exploração das potencialidades educativas e formativas das novas tecnologias.

2.2 POTENCIALIDADES DAS TIC NO ENSINO-APRENDIZAGEM

No Livro Verde para a Sociedade da Informação [2] pode ler-se que o “conceito de educação ao longo da vida deve ser encarado como uma construção contínua da pessoa humana, dos seus saberes, aptidões e da sua capacidade de discernir e agir. A escola desempenha um papel fundamental em todo o processo de formação de cidadãos aptos para a sociedade da informação e deverá ser um dos principais focos de intervenção para se garantir um caminho seguro e sólido para o futuro.”

A educação, face aos múltiplos e complexos desafios do futuro, assume um papel fundamental no processo de desenvolvimento económico e social. A educação é indispensável à humanidade. Por essa razão, ser professor é uma profissão extremamente importante e complexa.

Os alunos passam grande parte do seu tempo na escola. Por isso, as escolas não podem limitar-se a ensinar factos. É imperioso motivá-los e levá-los a frutificar os seus talentos no sentido de os ajudar a construírem um futuro melhor, utilizando, para isso, quer os meios tradicionais (os livros), quer os meios mais modernos (as novas tecnologias).

O ensino auxiliado pelas novas tecnologias potencia a diversidade das aprendizagens na sala de aula. Podem levar os alunos a explorarem e a irem mais além dos factos.

Além disto, podem, eventualmente, permitir a cada estudante progredir ao seu ritmo pessoal em vez de obedecer aos métodos rígidos de uma aula tradicional.

Tal como referem Ricardo Pocinho e João Gaspar [3] “Hoje, a inclusão do computador no ambiente educativo é uma imposição. A mesma tem sido compreendida pelos mais diversos governos, que têm promovido o acesso e o uso às Tecnologias de Informação e Comunicação. A necessidade de crescimento, de renovação das pedagogias é inegável.”

Deste modo, pode-se afirmar que a utilização das ferramentas tecnológicas contribui para a diversidade educacional e faculta aos alunos a oportunidade de serem mais exploradores e autónomos na construção do conhecimento.

Os alunos necessitam, constantemente, de metodologias ativas, atividades e estratégias diversificadas para que não se desmotivem. O psicólogo E. Fernandes [4] defende que “A adaptação e utilização de parte das novas tecnologias aos processos de ensino-aprendizagem ajudam, sem dúvida, os professores (...) criando-se situações que permitam e estimulem as actividades dos alunos”.

Em suma, estamos numa era digital onde as tecnologias da informação e comunicação fazem parte do nosso quotidiano e a sua utilização pode contribuir para a diminuição do insucesso escolar. Portanto, a educação aliada às TIC é uma mais valia, na medida em que aumenta a motivação dos alunos, proporciona a interdisciplinaridade, enriquece o conhecimento, promove o pensamento crítico e a autonomia na busca do conhecimento, possibilita o trabalho entre duas ou mais pessoas que estejam distantes e a aprendizagem pode ser adquirida longe do professor e da sala de aula. Por exemplo, hoje em dia os alunos até podem consultar os manuais através da internet e têm possibilidade de interagir com eles no processo construtivo do ensino-aprendizagem.

Face a tudo o que atrás ficou referido pode-se afirmar que as TIC proporcionam aos seus utilizadores variadas vantagens, sobretudo face às metodologias em que assentava o ensino tradicional. Na chamada escola tradicional preponderava a “instrução” e não a construção do conhecimento.

Com programas rígidos era flagrante o papel passivo dos alunos e desmesurado o papel do professor. Era feito um apelo, quase exclusivo, à memorização e não à reflexão e construção faseada do conhecimento. As TIC apontam novos caminhos. Há uma atitude participativa e interventiva dos alunos. Há debate de ideias e uma combinação equilibrada entre trabalho individual e trabalho de colaboração com outros alunos.

Neste contexto, o papel do professor não se pode esbater, nem ser subalterno. Pelo contrário, o professor tem de ser verdadeiramente um mediador, um formador atento dos alunos à sua evolução e às transformações individuais e colectivas que se vão operando, não esquecendo de salvaguardar as componentes cognitiva, socio-afetiva e comportamental dos alunos. Deste modo, as TIC não podem ser consideradas fins em si, mas sim instrumentos fundamentais para o melhor desempenho pessoal e profissional dos alunos.

Nas palavras de Luís Caetano [5] "A integração da tecnologia na educação só será uma realidade se os professores forem reais actores da mudança e estiverem formados técnica e pedagogicamente. Aliás os professores são um dos principais factores de sucesso dos projectos de integração da tecnologia".

Ao professor exige-se, assim, que seja capaz de se adaptar às novas realidades e substitua as formas de trabalho usuais e tradicionais, não se limitando a trabalhar só com o quadro e o respetivo manual. É necessário que repense, diariamente, e atualize as metodologias de ensino aprendizagem e diversifique os seus recursos. Tudo isto, com o intuito de cativar os alunos e ajudá-los a ultrapassar, da melhor forma, as dificuldades que surgem na compreensão e aplicação dos conteúdos que vão sendo lecionados na sala de aula.

Exige-se ao professor que seja um facilitador de aprendizagens e descobertas, reflexivo e ativo, pedagogo, atento, investigador e instigador, e que esteja preparado do ponto de vista científico, pedagógico, didático e, atualmente, tecnológico.

Todavia, apesar das vantagens indiscutíveis da utilização das TIC na sala de aula, existem riscos que podem ocorrer se a referida utilização não for controlada, acompanhada e apoiada pelo professor. A este compete orientar o uso e a pesquisa tendo como fio condutor os conteúdos.

É inegável que existe, ainda hoje, uma perceção negativa do uso das TIC. Deixar os alunos entregues a si próprios poderá produzir os efeitos contrários aos objetivos pretendidos. E porquê? Desde logo existe um problema da heterogeneidade dos alunos nas turmas. A proveniência familiar e geográfica dos alunos pode também influir na aprendizagem coadjuvada pelas TIC, porque, consoante os alunos são oriundos de uma família rural ou urbana existem, à partida, *handicaps* sociolinguísticas e culturais que influenciam a maior ou menor apetência e motivação para as novas ferramentas tecnológicas. Poderá haver, perante a falta de conhecimentos da utilização das TIC, riscos de desmotivação para a aprendizagem e para o relacionamento interpessoal. Por outro lado, os alunos não mediados pelos pais e professores podem tornar-se dependentes e até usarem e abusarem de conteúdos não selecionados para a aprendizagem e, por vezes, impróprios para a sua faixa etária.

Diversos especialistas reconhecem que o sucesso da aprendizagem tem como um dos pressupostos as relações de empatia entre o aluno e o professor e as relações dos alunos entre si. Por isso, o uso abusivo das TIC, em termos de tempo de utilização e de conteúdos pode prejudicar as relações atrás referidas.

Compete ao professor acautelar este risco pelo que, na planificação das aulas, tem de saber dosear e definir com clareza os momentos e conteúdos cuja abordagem vai pressupor a utilização de meios tecnológicos. Também compete aos professores, pais e encarregados de educação alertarem os alunos para a necessidade de considerarem importantes, para a sua formação, os conhecimentos veiculados pelos outros meios de comunicação mais tradicionais bem como a indispensabilidade do recurso aos livros. Como em tudo, compete aos professores, pais e alunos encontrarem o justo equilíbrio entre benefícios e riscos das TIC, em nome da vastidão de potencialidades por elas veiculadas. Mais uma vez se acentua o papel preponderante do professor na sala de aula e dos pais em ambiente familiar. Pais e professores têm de estar alerta para que as novas ferramentas não sejam um apelo constante à diversão que pode ter o seu lugar mas na justa medida.

Em resumo, hoje em dia os alunos, através das Tecnologias da Informação e Comunicação, têm acesso a cada vez mais fontes de informação e como tal é necessário saber pesquisar e saber gerir a informação encontrada, pois também existem informações erradas na Internet. Cabe ao Professor alertar o aluno para este facto tal como argumentam Ricardo Pocinho e João Gaspar [3] "O diálogo com o professor é fundamental e insubstituível. As novas tecnologias da informação não põem em causa o seu papel, bem pelo contrário, atribuem-lhe funções de especial relevância".

Relativamente à motivação dos alunos na sala de aula com a utilização das TIC, Natércia Menezes [6] realizou um estudo, em 2012, e concluiu que "a utilização das TIC contribui para um maior enriquecimento das aulas", que o "nível de motivação em sala de aula (. . .) é muito mais forte" e que "a relação existente entre o uso das TIC na sala de aula e a aprendizagem efectiva dos alunos é muito boa, assim como a relação professor-aluno também é muito boa".

Também argumenta Hélio Correia [7] que "As TIC constituem não só uma ferramenta ao serviço do processo de ensino-aprendizagem, mas principalmente um instrumento que propicia representar e comunicar o pensamento, actualizá-lo continuamente, resolver problemas e desenvolver projectos" e menciona ainda que "A utilização das TIC favorece a articulação entre as diversas áreas do saber, proporcionando um aprofundamento de alguns conteúdos específicos e levando à produção de novos conhecimentos".

Podemos concluir, portanto, que são mais as vantagens que existem relativamente à utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas salas de aula do que os inconvenientes.

2.3 Integração das TIC no Programa de Matemática no Ensino Básico

A Matemática é uma disciplina que, infelizmente, um grande número de alunos não vê com bons olhos. Para contrariar esta situação e combater o insucesso na disciplina têm vindo a ser implementadas, no ensino, diferentes estratégias. Uma delas é o recurso às tecnologias para estimular a compreensão, a interação e facilitar o ensino e a aprendizagem.

No documento *A Matemática na Educação Básica* de 1999, do Ministério da Educação, da autoria de Paulo Abrantes, Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira [8], é defendida a utilização de recursos tecnológicos na sala de aula de forma gradual. Referem que todos os alunos devem aprender a utilizar "não só a calculadora elementar, mas também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos e, ainda, o computador. Quanto a este, uma iniciação ao trabalho com a folha de cálculo e com programas de gráficos de funções e de geometria dinâmica deve fazer parte da experiência de aprendizagem de todos os alunos."

De igual modo, argumentam que diversos conteúdos, como por exemplo os de *Estatística e Probabilidades* [8] podiam, através das tecnologias atuais, nomeadamente a calculadora e o computador, ser mais facilmente compreendidos porque permitem "trabalhar com dados reais e fazer simulações. As capacidades destas tecnologias na organização e visualização de dados e na execução de cálculos, assim como o retorno quase imediato dos efeitos de decisões tomadas, tornam possível colocar ênfase na compreensão e exploração de conceitos, na interpretação da informação e na avaliação de argumentos."

Neste documento [8] estão, também, presentes as seguintes palavras: "A exploração de situações que envolvem funções e gráficos deve ser apoiada, algumas vezes, pelo recurso à tecnologia gráfica. Com efeito, o conhecimento e uso da folha de cálculo e outros programas de computador especificamente vocacionados para o trabalho com gráficos, assim como das calculadoras gráficas, devem fazer parte, pelo menos a um nível introdutório, das experiências de aprendizagem de todos os alunos do ensino básico. (...) O uso de software adequado permite a visualização quase imediata das imagens geradas quando os alunos fazem conjecturas sobre propriedades e relações (...) e procuram testá-las e justificá-las. A manipulação que é proporcionada pela utilização dessas ferramentas computacionais favorece a formação de imagens mentais, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial".

Em 2001, o Ministério da Educação, através do *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* [9], volta a salientar a importância do uso da tecnologia nas salas de aula indicando que o aluno devia ser capaz de "mobilizar saberes (...) tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano", de "Usar adequadamente linguagens das diferentes áreas do saber (...) tecnológico para se expressar" e "rentabilizar as tecnologias da informação e comunicação nas tarefas da construção de conhecimento". Neste documento é referido ainda que o professor deveria "rentabilizar as potencialidades das tecnologias de informação e de comunicação" e "organizar o ensino promovendo a utilização de fontes de informação diversas e das tecnologias da informação e comunicação para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas".

Se olharmos, atentamente, para a história das ciências verificamos que na matemática são notáveis os avanços quer em termos científicos quer em termos da crescente evolução no que concerne a métodos, processos e técnicas com vista ao desenvolvimento das capacidades mentais do indivíduo em geral e ao ensino-aprendizagem em particular.

A importância dada ao uso das TIC prosseguiu. Pode-se confirmar isso no *Programa de Matemática do Ensino Básico* [10], do Ministério da Educação, publicado em 2007: "Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores – usualmente designados por Tecnologias de Informação e Comunicação – na realização de cálculos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção deve centrar-se nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados." Mas, embora concordem na utilidade das tecnologias, alertam que "A calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental."

Ao longo dos anos, nas aulas de matemática, as ferramentas clássicas utilizadas a tempo inteiro foram sendo trocadas pelas Tecnologias da Informação e Comunicação. Os ambientes computacionais foram ganhando terreno e defendidos por diversos autores pois foram permitindo que os alunos conseguissem, por exemplo, conjeturar e em tempo real constatar a sua validação, através de demonstrações, análise de exemplos e contra-exemplos.

Por exemplo, relativamente ao conteúdo *Tratamento de dados*, no mesmo programa de 2007 [10] mencionado anteriormente, referem que "A calculadora e o computador são instrumentos fundamentais no trabalho a realizar neste tema, uma vez que permitem que os alunos se concentrem na escolha e justificação dos métodos a usar, na análise de dados e na interpretação de resultados libertando-os de cálculos demorados. O computador, através da folha de cálculo, oferece aos alunos amplas possibilidades de organizarem e representarem dados através de tabelas e gráficos. Por outro lado, através da Internet, os alunos podem aceder, rapidamente, a bases de dados e a informação estatística". Na *Geometria* aconselham a utilizar programas computacionais de geometria dinâmica e os applets (pequenos programas ou aplicações disponíveis da Internet) porque "favorecem a compreensão dos conceitos e relações geométricas (...), permitem desenhos e construções com rigor adequado (...) e ajudam a criar ambientes propícios à investigação das relações existentes".

As tecnologias foram assumindo cada vez mais relevância. Em 2009, em *Álgebra no Ensino Básico*, de João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos [11], foram consideradas de grande valor para a aprendizagem e, nesse documento, apontam como exemplo a utilização de diversos recursos tecnológicos: o computador, a calculadora gráfica, e *software*, tais como o Excel para as representações gráficas e estudos estatísticos; o Geogebra para construções geométricas e exploração dessas construções; e o Derive para fazer todo o tipo de manipulação algébrica. Apesar de terem sublinhado a utilidade de recursos tecnológicos, avisam, também, que "só por si, o seu uso não garante a aprendizagem dos alunos. Por isso, é necessário saber quando e como usar a tecnologia."

Mais tarde, no *Programa e Metas Curriculares de Matemática* [12], no Ensino Básico, homologado em 2013, do Ministério da Educação e Ciência, verifica-se que, apesar de considerarem as tecnologias uma mais valia, dão enfase à defesa do seu uso ponderado. Como exemplo, referenciam a utilização da calculadora que tem vindo a vulgarizar-se e a ser utilizada de forma inapropriada em algumas atividades letivas, comprometendo "a aquisição de procedimentos e o treino do cálculo mental e, consequentemente, a eficácia do próprio processo de aprendizagem." Neste caso, recomendam a utilização apenas em anos escolares mais avançados e em situações muito pontuais.

Concluindo, o nosso sistema educativo teve e terá sempre de acompanhar as mudanças provocadas pela expansão qualitativa e quantitativa das novas tecnologias. E podemos hoje constatar que nas escolas estes poderosos meios de trabalho têm tido uma implementação cada vez maior.

Porque as escolas não podem parar no tempo e no modo de ensinar, a utilização crescente das TIC juntamente com a reorganização curricular, a definição de novas metas e a introdução de novos processos de ensino-aprendizagem permitem, no presente e no futuro, às crianças, jovens e cidadãos, a aquisição de novas competências.

Atualmente, o computador, com as suas potencialidades, tem sido uma grande ferramenta didática para os professores de matemática. Através dele, desde o recurso a programas educativos interativos; a *software* tais como o Sketchpad, o Geogebra e o Cabri Géomètre, o Maple, o Derive, o SPSS, o Mathematica; a realização de jogos didáticos e outras atividades de natureza interativa, os professores podem ampliar a capacidade cognitiva do aluno, desenvolver a intuição geométrica e a capacidade de visualização e proporcionar diferentes experiências aos alunos, a nível de cálculo, de visualização de gráficos, de projetos de modelação e de investigação, de exploração de conceitos, de relações matemáticas e demonstrações, de construções geométricas, análise de dados estatísticos, etc..

Hoje, a Internet proporciona uma enorme rede de comunicação que alarga e aprofunda o conhecimento da sociedade. Tem uma enorme eficácia quer a nível profissional, quer escolar. No caso específico da disciplina de matemática é inegável que a utilização das TIC pode gerar um elevado grau de motivação dos alunos. Logo, dadas as reconhecidas dificuldades de aprendizagem desta disciplina sentidas por muitos alunos, as novas tecnologias podem ser consideradas facilitadoras da compreensão de diversos conteúdos teóricos quando utilizadas com rigor e na justa medida.

Por outras palavras, como enfatiza Fernando Costa [13] "os novos recursos de comunicação e informação hoje disponíveis, potencialmente poderosos como suporte da aprendizagem, levantam desafios acrescidos, em que os professores terão de assumir preferencialmente um papel de facilitadores da aprendizagem, menos centrados sobre si próprios, de forma a compreenderem como pode ser utilizada para fins educativos e, desse modo, possibilitarem um aproveitamento efectivo dos avanços tecnológicos mais recentes e em constante evolução".

2.4 RECURSOS EDUCATIVOS DIGITAIS NA INTERNET: AS QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Recursos educativos digitais, segundo a autora Catarina Franco [14] "são instrumentos em suporte digital destinados aos contextos de aprendizagem. (...) Todos estes recursos estão interligados a um elemento de utilização, o computador", como, por exemplo, um jogo educativo, um vídeo, uma apresentação multimédia, um programa tutorial, uma página web, um teste ou uma aula on-line, os e-manuais, as questões de escolha múltipla desde que armazenado em suporte digital, etc..

Cada um dos recursos educativos digitais pode ser agrupado, de acordo com Helena Capela [15], "em quatro grandes grupos que por vezes se intersectam pois o mesmo recurso pode servir finalidades diferentes. Assim, podemos considerar recursos para consolidação de conhecimentos, de informação, de avaliação, de aprendizagem pela descoberta e de desenvolvimento de capacidades".

A realização de questões de escolha múltipla é um recurso que pode ser utilizado para consolidação de conhecimentos e de avaliação. Os alunos através da sua realização podem determinar o seu grau de aquisição dos conhecimentos e competências relativos a uma determinada unidade curricular ou conteúdo.

Segundo Hugo Camilo e José Silva [16], os testes de escolhas múltiplas "constituem uma das principais formas de avaliação em todo o mundo, já que aliam facilidade de execução e avaliação, economia de tempo e fiabilidade. Está provado que podem avaliar o processamento cognitivo de alto nível de complexidade, como a interpretação, síntese e aplicação do conhecimento, além de testar a simples recordação de factos isolados".

Existem diversos tipos de questões de escolha múltipla, sendo, para Amâncio Pinto [17], os tipos mais frequentes as de escolha múltipla com 3 a 5 opções; as de escolha múltipla emparelhada; as de escolha múltipla dupla verdadeiro-falso; e as de escolha múltipla de completar com palavras.

Atualmente, as perguntas de escolha múltipla fazem parte da maioria dos testes que os alunos realizam ao longo do ano escolar, nas mais diversas disciplinas, bem como em exames nacionais sendo as do primeiro tipo, referidas anteriormente, as mais convencionais e que mais se encontram nos exames nacionais de matemática. Estas costumam ser constituídas por um enunciado, normalmente em forma de pergunta, seguido por quatro alternativas assinaladas com as letras A, B, C e D, sendo apenas uma delas a resposta correta. Este tipo de questão de escolha múltipla também é o formato mais comum que se encontra na Internet, no que concerne à disciplina de Matemática. Por estes motivos, apenas irão ser abordadas as questões do primeiro tipo.

A pedagoga Ana Cianflone e alguns dos seus colegas [18] alertam que cada uma das questões de escolha múltipla deve ser "independente das demais questões, isto é, não fornecer "pistas" para outras questões ou provocar propagação de erro" e deve "exigir conhecimento relevante, pertinente e de grau de complexidade compatível com as características da população alvo", bem como "solicitar, de preferência, processos mentais que envolvam raciocínio e reflexão, compreensão de razões e de relações, aplicação e uso da informação, mais do que simples memorização ou retenção da informação".

O autor José Sampaio [19] sublinha que as questões de escolha múltipla "Consistem em apresentar uma pergunta, fornecendo simultaneamente várias respostas entre as quais terá de seleccionar a(s) correta(s)" e que a estrutura de uma questão de escolha múltipla é a seguinte: "tronco; instruções; lista de escolhas e distractores".

O tronco deve apresentar a questão ou enunciado do problema com clareza e ser o mais curto possível. Deve conter todas as informações necessárias à sua solução e evitar dados desnecessários à sua resolução. Além disto, o enunciado deve conter uma pergunta a que o aluno saiba responder ou fazer, antes de ler as alternativas e deve ser colocado, de preferência, de forma positiva. Caso se opte por um enunciado negativo é aconselhado que se sublinhe a palavra `Não` ou que esta seja escrita com letras maiúsculas.

Para não comprometer a qualidade e a eficácia das questões de escolha múltipla, de acordo com o *Guia de Elaboração e Revisão de Questões e Itens de Múltipla Escolha*

[20], caso seja necessário, deve-se utilizar ilustrações originais (fotos, figuras, textos, reportagens sobre assuntos atuais, fontes, etc) e nunca ilustrações com carater decorativo.

No que respeita às instruções, estas devem ser claras, breves e objetivas, indicando, por exemplo, se há apenas uma resposta correta ou uma errada e a forma de a assinalar, ou seja, o enunciado deve explicitar claramente o que se exige. Estas instruções estão inseridas no tronco.

Relativamente à lista de escolhas, esta deve conter uma única resposta certa, sendo as restantes designadas por distratores, uma vez que são respostas erradas e são colocadas com o intuito de distrair o aluno. Sobre isto, José Sampaio [19] ainda recomenda que:

- a resposta correta apareça na lista de escolhas numa ordem arbitrária, em todas as posições.
- os distratores e a resposta certa, tanto quanto possível, sejam homogéneos em extensão, lógicos e coerentes, para que os alunos, por exemplo, não acertem na resposta correta por simples eliminação de respostas absurdas.
- na redação da lista de escolhas se evite o uso de palavras como `sempre`, `nunca`, `todos`; uma vez que há pouca probabilidade de termos tão abrangentes serem verdadeiros. De igual modo as palavras `geralmente`, `por vezes`, `em certas condições` que por serem limitadas tendem a tornar as escolhas verdadeiras, pelo que também devem ser evitadas.
- a resposta que se pretende certa seja objetiva e se verifique que não existem nos distratores resposta tão ou mais adequada do que a prevista como certa.

Os distratores não devem ser escolhidos aleatoriamente ou sem ter nada a ver com a questão colocada. Devem, sim, ser construídos tendo em conta as possíveis respostas erradas dos alunos, tornando-se desta forma mais eficientes e com o objetivo de avaliar conhecimentos concretos. É importante salientar que as opções do tipo `Todas as respostas estão corretas.` ou o contrário, ou seja, `Nenhuma das respostas é a correta.` devem ser evitadas, uma vez que são respostas ambíguas.

Amâncio Pinto [17] alerta que na elaboração das questões de escolha múltipla se devem evitar as seguintes situações: "questões problemáticas e ambíguas que mesmo os melhores alunos têm dificuldades em responder; a avaliação de conhecimentos irrelevantes e sem importância e informações que não foram aprendidas; discriminações bastante subtis; questões com a intenção de confundir e enganar os alunos". Desta forma, sempre que sejam, liminarmente afastadas as situações referidas, a avaliação do aluno será mais produtiva.

Com o intuito de se avaliar a aprendizagem de um determinado conteúdo programático, o aluno pode resolver questões de escolha múltipla pela Internet. Este recurso digital, por exemplo fornecido pelo professor, torna o momento da avaliação mais interativo e mais estimulante, que pode ser efetuado quer na sala de aula ou noutro local. Existe a possibilidade de, quando o aluno selecionar a alternativa correta, receber de imediato um retorno (*feedback*) automático, ou seja, algo que indique ao aluno se acertou ou não na questão a que respondeu.

É uma mais valia se este *feedback* não se limitar a dizer expressões do tipo: `Acertou`, `Errou` ou `Tente novamente` e pode ter um efeito mais positivo no aluno se for complementado com uma explicação específica para a resposta escolhida, principalmente se este tiver errado a questão na medida em que ajudará o aluno a compreender as razões do seu erro. Outro ponto a ter em conta é o tipo de explicação fornecida. Se esta for simples, de fácil compreensão e de fácil leitura vai permitir ao aluno uma informação muito mais útil para a sua aprendizagem, quer em situação de acerto quer em situação de erro. Caso contrário, o aluno confrontado com, por exemplo, frases longas e pouco apelativas, a probabilidade de não reter a informação fornecida é grande.

Todas as questões de escolha múltipla que são colocadas aos alunos não podem ser elaboradas com um grau de exigência superficial. Elas devem obrigar o aluno a uma reflexão séria sobre os conteúdos em apreço.

É importante salientar que os alunos têm tendência a julgarem, equivocadamente, que as questões de escolha múltipla são, com frequência, mais fáceis que as perguntas de desenvolvimento. No entanto, embora possam parecer mais simples, se estas forem bem elaboradas podem tornar-se mais complexas e difíceis que as perguntas de desenvolvimento, nomeadamente se tiveram um grande número de distratores e estes, em termos de significações, forem, relativamente, semelhantes entre si.

Todavia será sempre pedagogicamente errado os professores apresentarem aos alunos perguntas em que as respostas, por escolha múltipla, têm um conteúdo e significado excessivamente semelhante e ambíguo. Nestas situações os alunos podem sentir-se confundidos e mesmo que dominem os conteúdos podem, facilmente, cometer erros injustificados, prejudicando, seriamente a sua avaliação.

Vejamos as vantagens e desvantagens da utilização das questões de escolha múltipla. Como vantagens sublinha-se:

- a rapidez na resposta do aluno, permitindo ao professor identificar mais rapidamente os conteúdos em que os alunos têm mais dificuldades;
- a abrangência, pois uma questão de escolha múltipla e respetivas respostas pode conter um maior número de tópicos e objetivos de aprendizagem;
- eliminação da subjetividade de correção que é feita de forma mais mecânica e fiel, ao contrário das perguntas de desenvolvimento.

Esta última vantagem, bem como a rapidez de correção das questões de escolha múltipla por parte do professor, não se aplica, obviamente, às questões que são realizadas através da Internet, uma vez que a correção é feita automaticamente.

Como desvantagens apontam-se:

- a probabilidade de se acertar ao acaso;
- a dificuldade de elaborar, por exemplo, um formato de avaliação que seja representativo dos conhecimentos e competências escolares envolvidos;
- o favorecimento dos alunos que têm maior capacidade de interpretação e capacidade de leitura;
- não permitem desenvolver a criatividade do aluno e não têm em conta a sua opinião sobre a matéria;
- a probabilidade de errar caso a questão não seja lida com atenção.

Apesar destas desvantagens, as perguntas de escolha múltipla como um recurso digital podem ser consideradas uma mais valia para os alunos, uma vez que estes se quiserem ser autónomos e avaliarem os seus próprios conhecimentos podem fazê-lo mais facilmente. Ter um *feedback* imediato à opção selecionada por eles pode ainda ser uma grande ajuda se vier acompanhado da resolução detalhada da questão, como já foi referido anteriormente.

Capítulo 3

Sistemas de duas equações do 1^{o} grau com duas incógnitas

De acordo com Ponte [11] o estudo dos sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas "proporciona aos alunos um amplo conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade (...) e contribui para desenvolver a sua capacidade de utilizar linguagem algébrica, o seu raciocínio matemático e a sua capacidade de resolver problemas."

Neste capítulo, começa-se por indagar a origem do tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas*, na história de Matemática. Como apareceu o conceito *sistemas de equações lineares*? Que matemáticos contribuíram para a descoberta de métodos de resolução dos sistemas de equações lineares? Estas são algumas das questões às quais se tentará responder, fazendo uma análise à história da matemática e apresentando alguns elementos históricos do desenvolvimento de sistemas lineares.

A álgebra é, hoje em dia, o domínio onde está inserido o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.* Deste modo, faz-se uma breve descrição da evolução da álgebra, como unidade temática no programa de matemática e enquadra-se o tema, analisando a sua origem e evolução, ao longo dos anos, na disciplina de matemática, no 3º ciclo do ensino básico.

De seguida, explicitam-se os conteúdos teóricos relativos ao tema, nomeadamente os que são lecionados aos alunos, atualmente, no 8º ano de escolaridade.

Quando os alunos têm dificuldades e estas não são ultrapassadas, repercutem-se na aprendizagem de conceitos que envolvam esses conhecimentos. Desta forma, a análise das dificuldades e dos erros que os alunos cometem pode contribuir de forma positiva para a aprendizagem. Por isso, por último, analisam-se as dificuldades e os erros que os alunos manifestam na aprendizagem de conteúdos matemáticos de um modo geral e que envolvem, concretamente, o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.*

3.1 ORIGEM DO TEMA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Os primeiros registos sobre os sistemas de equações lineares aparecem na época dos babilónios. Segundo Neves [21], citando O'Connor e Robertson, em meados dos anos 300 a. C, há registo de um exemplar que envolve um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, nomeadamente o seguinte:

"Há dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos na razão de dois terços de saca por jarda quadrada enquanto o outro produz grãos na razão de meia saca por jarda quadrada. Se o total produzido é mil e cem sacas, qual é a área de cada campo?"

Traduzindo este problema para linguagem matemática, onde x representa a área de um campo e y a área do outro campo, em jardas quadradas (`1 jarda = 0,9144 metros`), tem-se que:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 1100 \end{cases}$$

Encontram-se, também, outros exemplos destes na maior obra chinesa de textos matemáticos, o livro *Chui-Chang Suan-Shu*, conhecido por *Nove capítulos sobre a arte matemática.* Este livro influenciou de tal forma toda a matemática oriental que é uma obra, muitas vezes, comparada aos Elementos de Euclides. O *Nove capítulos sobre a arte matemática* foi escrito durante a dinastia Han, nos meados 200 a.C e contém 246 problemas matemáticos, de geometria e de aritmética, distribuídos por nove capítulos. De acordo com Simone Luccas e Irinéa Batista [22], é no capítulo VIII que se encontra um dos seguintes problemas relativos aos Sistemas de Equações Lineares:

"Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?."

Hoje em dia, algebricamente este problema pode ser transcrito como

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

onde o x representa o preço dos feixes de boa qualidade, y o preço dos feixes de qualidade regular e z o preço dos feixes de má qualidade.

Os chineses, naquela altura, resolviam os sistemas de equações lineares usando barras de bambu sobre tabuleiros idênticos aos do jogo das damas com quadrados. Usavam um sistema de numeração posicional e recorriam ao uso de um quadrado em branco quando, ao efetuarem as operações, obtinham o zero. Assim, acabaram por descobrir o chamado método de resolução por eliminação, cujo intuito era chegar a um sistema de equações lineares mais fácil e equivalente ao primeiro, e consistia em anular coeficientes por meio de operações elementares.

De acordo com Robinson Santos [23], segundo este método chinês naquela altura, o problema era apresentado da seguinte forma no tabuleiro:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

A primeira linha representava a colheita de boa qualidade, a segunda linha a colheita regular e a terceira linha a de má qualidade. Fazendo a correspondência com os respetivos termos do sistema linear constata-se que a primeira linha corresponde aos coeficientes de x, a segunda linha aos coeficientes de y, a terceira linha aos coeficientes de z e a última aos termos independentes.

Para solucionar o problema, Robinson Santos [23] descreve cada um dos passos que é ilustrado no *Nove Capítulos sobre a arte matemática*.

O primeiro passo consistia em multiplicar todos os termos da coluna central pelo primeiro termo da coluna direita, ou seja, pelo 3.

1	*6*	**3**
2	*9*	2
3	*3*	1
26	*102*	39

O segundo passo consistia em subtrair o número à direita de cada um dos números da esquerda, ou seja, fazer a diferença entre os números da segunda coluna e os números da terceira coluna e obtinha-se o seguinte resultado:

1	*3*	3
2	*7*	2
3	*2*	1
26	*63*	39

O terceiro passo consistia em repetir o 2º passo sucessivamente até que o primeiro número da coluna da esquerda, neste caso a coluna central, fosse eliminado. Por outras palavras, o resultado da diferença teria de ser zero.

1	*0*	3
2	*5*	2
3	*1*	1
26	*24*	39

Fazendo, neste passo, a analogia com os sistemas lineares, tem-se que:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

Retomando o processo descrito por Robinson Santos [23], os passos seguintes consistiam em repetir os passos anteriores, por ordem, mas entre as colunas 1 e 3, com o objetivo de eliminar também o primeiro elemento da coluna 1.

3	0	**3**
6	5	2
9	1	1
78	24	39

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Por último, repetia-se, mais uma vez, os primeiros passos mas entre as colunas 1 e 2, eliminando-se, assim, o segundo número da coluna 1.

0	0	3
20	**5**	2
40	1	1
195	24	39

0	0	3
15	5	2
39	1	1
171	24	39

0	0	3
10	5	2
38	1	1
147	24	39

0	0	3
5	5	2
37	1	1
123	24	39

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Como foi referido anteriormente os chineses colocavam um quadrado em branco quando, após as operações, obtinham o zero. Sendo assim:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Fazendo a análise do resultado obtido com um sistema linear, tem-se que:

$$\begin{cases} 36z = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

Assim, a primeira incógnita era facilmente determinada pela divisão de 99 por 36, ou seja,

$$z = \frac{99}{36}$$

.

Associando este resultado ao problema pode-se concluir que o preço do feixe de má qualidade custava 2,75 dou.

Por sua vez, as outras incógnitas eram determinadas por substituições sucessivas:

$$5y + 1 \times 2,75 = 24 \Leftrightarrow y = 4,25$$

$$3x + 2 \times 4,25 + 2,75 = 39 \Leftrightarrow x = 9,25$$

Conclui-se assim que o preço do feixe de qualidade regular custava 4,25 dou e o de boa qualidade 9,25 dou.

Através deste exemplo constata-se que o método chinês era usado para encontrar quantidades desconhecidas que atualmente se resolve, facilmente, utilizando os sistemas de equações lineares.

De salientar que o método anteriormente descrito veio a ser, mais tarde, no século XIX, desenvolvido e estruturado por Karl Friedrich Gauss, em 1809, na sua obra Theoria Motus, e, atualmente, é conhecido por Método de Eliminação de Gauss.

Em meados do século VII, o matemático indiano Brahmagupta também contribuiu para a generalização do método de substituição que hoje os alunos usam na resolução de sistemas. Este matemático desenvolveu o chamado *Método da Eliminação Sucessiva de Incógnitas.* [24]

Na dissertação de Florisvaldo Rocha [25], encontra-se uma exemplo fornecido por Lintz, que elucida todos os passos usados no método adotado pelo Brahmagupta e que são os seguintes:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1º passo - isolar uma das incógnitas com o intuito de a eliminar através da simplificação de termos. Portanto, resolvendo as três equações em ordem a x_1, obtém-se o seguinte:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 1 \\ x_1 = 2 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} \end{cases}$$

2º passo - por comparação, igualar a primeira equação com a segunda e posteriormente, a primeira com a terceira, tendo em conta que as incógnitas x_1, x_2 e x_3 possuem o mesmo valor para todas as equações. Obtém-se assim um sistema de duas equações lineares.

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 1 = 2 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} \end{cases}$$

Desta forma, a incógnita x_1 é eliminada e repetem-se os dois procedimentos anteriores com o intuito de eliminar outra incógnita e sobrar apenas uma.

3º passo - resolver cada uma das equações obtidas anteriormente em ordem a uma das incógnitas que sobra, neste caso, por exemplo, em ordem a x_2.

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 1 = 2 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{7x_3 + 1}{3} \\ x_2 = \frac{5x_3 - 2}{5} \end{cases}$$

4º passo - igualar as duas equações e resolver em ordem à incógnita, neste caso, em ordem a x_3.

$$\frac{7x_3+1}{3}=\frac{5x_3-2}{5}\Leftrightarrow 35x_3+5=15x_3-6\Leftrightarrow x_3=-\frac{11}{20}$$

5º passo - por substituição, uma vez obtido o valor de uma incógnita obtém-se o valor das outras.

$$x_2=-\frac{57}{60}=-\frac{19}{20} \text{ e } x_1=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

Em 1683, o matemático japonês Takakazu Seki Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, ao confrontar-se com um problema geométrico mais difícil, sentiu a necessidade de generalizar procedimentos para a resolução de sistemas de equações lineares, independentemente do número de incógnitas do sistema e começou a desenvolver este assunto. Esse problema foi exposto no seu manuscrito "Kai Fukudai no Ho", ou seja, "Método de Solução de Questões Secretas", onde sistematizou, finalmente, o procedimento chinês, libertando-o do recurso às barras de bambu, e cujo cálculo não restringia o número de incógnitas.

Cerca de dez anos mais tarde, no Ocidente, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, chega à mesma generalização que o japonês Kowa e descobre o processo para eliminar as incógnitas de um Sistema de Equações Lineares, semelhante ao usado nos dias de hoje. Como prova destas contribuições matemáticas por parte de Leibniz é a existência de cartas que este trocou com outro matemático, Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital.

As ideias desenvolvidas, tanto por Leibniz como por Kowa, foram grandes contribuições para o desenvolvimento dos conceitos fundamentais de teorias especificas relacionadas com os Sistemas de Equações.

Em meados de 1729, outro matemático, o escocês Colin Maclaurin, desenvolveu novos conteúdos relacionados com os Sistemas de Equações Lineares com duas, três e quatro incógnitas. Este descobriu outra forma de resolução dos mesmos. No entanto, esta descoberta apenas foi publicada, postumamente, no seu trabalho *Treatise of Algebra*, em 1748, e ficou conhecida por Regra de Cramer, um nome que advém do matemático Gabriel Cramer, que apesar de ter sido estimulado por um objetivo diferente, também chegou à mesma regra que Colin, anos mais tarde.

Ao longo do século XVIII foram vários os matemáticos que deram a sua contribuição para a evolução de mais conteúdos relacionados com os sistemas de equações lineares tais como os franceses Étiènne Bézout, Alexandre Vandermonde e Pierre Laplace.

Em suma, ao longo dos anos, foram feitas várias descobertas de métodos de resolução de sistemas, por diferentes pessoas e diferentes épocas. Mas, segundo Simone Luccas e Irinéa Batista [22], os métodos descobertos por Brahmagupta e Gauss foram os que, sem dúvida, mais contribuíram para a evolução dos métodos da substituição e da adição atualmente conhecidos.

É importante destacar que a Álgebra é um ramo da matemática que trabalha com símbolos, relações matemáticas abstratas, relações entre números, etc.. Por isso, toda a sua evolução e crescimento foram influenciando os diversos matemáticos que tiveram um papel preponderante nas mudanças relativas aos métodos de resolução de sistemas de equações lineares, tais como [26]: Diofanto que desenvolveu métodos aproximados para a resolução de equações e sistemas de equações, François Viète que demonstrou as vantagens do uso das letras para designar quantidades desconhecidas, entre outros.

3.2 ORIGEM E EVOLUÇÃO DO TEMA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO EM PORTUGAL

Tudo está sujeito à evolução do tempo, aos condicionalismos políticos, económicos e sociais. Tudo está em aceleração constante e o que em tempos parecia definitivo hoje está sujeito a uma mudança imparável. A esta mudança e transitoriedade também não escapa a educação, nomeadamente a disciplina de Matemática. Os professores e os programas estão em constante evolução e adaptação às novas necessidades, quer sociais, quer económicas, contra a estagnação tradicional.

Recuando no tempo podemos constatar que até ao final do século XIX tínhamos, no caso específico da Matemática, conteúdos muito elementares, quase desligados e desarticulados face à realidade, com uma abordagem formal que assentava na memória e na absorção mecânica. Tratava-se de um paradigma em que predominava a passividade do aluno na construção do conhecimento e o dirigismo do professor com exclusão da utilização de métodos que promoveriam a iniciativa, a pesquisa, o espírito crítico, o debate e o trabalho colaborativo.

Mas, foram surgindo, ao longo dos anos, novos impulsos sociais, novos problemas, novas necessidades, novos desafios. Foi neste contexto de desafios da sociedade que se verificaram significativos avanços científicos e tecnológicos e que promoveram a necessidade de novas abordagens da Matemática. O anterior paradigma começou então a ser progressivamente abandonado. A novos conteúdos foram-se associando, também, novas metodologias de ensino. [27]

Em 1986, foi aprovada, pela Assembleia da República, a *Lei de Bases do Sistema Educativo* e assim se inicia uma reforma educativa. Foram elaborados novos programas para todas as disciplinas nos diferentes níveis de escolaridade. Em 1990/91, começou-se com o primeiro ano de cada ciclo e, nos anos seguintes, foram sendo, sucessivamente, introduzidos os programas dos restantes anos de escolaridade [28]. De acordo com Carlinda Leite e Fátima Delgado [29], na disciplina de matemática "Passou a valorizar-se a competência matemática e, neste sentido, a privilegiar-se a forma de apresentação dos temas matemáticos a abordar".

De notar que, nesta altura, em 1990/91, como aponta Carla Alpalhão [30] , o *programa de matemática*, no ensino básico, estava organizado em "três blocos de conteúdos: Números e Operações, Forma e Espaço e Grandezas e Medidas". Constata-se, portanto, que a álgebra não era valorizada e, como tal, não aparecia como tema. Segundo as palavras de João Ponte [31] "tanto nos programas do ensino básico como nos do ensino secundário, a Álgebra desaparece como grande tema da Matemática, estando reduzida a um conjunto de técnicas (cálculo algébrico) e ao estudo de funções".

Em 2001, o *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências essenciais* [9], publicado pelo Ministério da Educação, introduziu novas mudanças curriculares importantes relativamente ao programa de 1990/91, nomeadamente a "clarificação das competências a alcançar no final da educação básica e (...) para cada uma destas competências gerais, a sua operacionalização". Neste documento, a explicitação das competências matemáticas estavam desenvolvidos de acordo com quatro temas: Números e Cálculo; Geometria; Estatística e Probabilidades; Álgebra e Funções. Relativamente ao tema *Sistemas de equações* apenas é mencionado que uma das competências específicas a desenvolver pelos alunos no 3º ciclo, é a "aptidão para resolver (...) sistemas, assim como realizar procedimentos algébricos simples".

Em 2007, o programa de matemática de 90/91 no ensino básico sofreu, novamente, um reajuste que resultou em mudanças bastantes significativas para o ensino da Matemática. Era necessário uma melhor articulação entre os programas dos três ciclos do ensino básico e que os alunos passassem a ser mais ativos na construção do conhecimento. Tal como sublinha Amélia Gomes [32], o programa de Matemática, elaborado em 90/91, era um ensino "baseado na memorização e na mecanização, com uma linguagem muito específica e formal. Apesar dos avanços tecnológicos e de um maior leque de recursos disponíveis, os resultados finais e de exames não têm vindo a mostrar melhorias e os alunos continuam a revelar pouca motivação e dificuldades na aprendizagem". Por estes motivos era fundamental uma mudança. Para tal, foi elaborado o *Programa de Matemática do Ensino Básico* [10], pelo Ministério da Educação, que foi homologado nesse ano a 28 de Dezembro de 2007.

Este programa está estruturado tendo em conta 4 grandes temas matemáticos, nomeadamente: Números e Operações; Geometria; Álgebra; e Organização e Tratamento de Dados. No 1º ciclo a álgebra está presente no tema *Números e Operações*. No entanto, nos 2º e 3º ciclos, a Álgebra é trabalhada como um tema programático autónomo. Constata-se, portanto, que, em comparação com o programa de 1990/91, há uma revalorização da Álgebra, onde se pretende que todos os alunos desenvolvam o pensamento algébrico, essencial para a resolução de problemas.

De acordo com esse programa de Matemática, o estudo do tema *Álgebra* no 3.º ciclo, tem como objetivos "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" [10].

No que concerne ao tópico *Sistemas de duas equações do 1º grau a duas incógnitas* que se encontrava, na altura, inserido, no 3º ciclo, na unidade *Equações*, do tema *Álgebra*, o *programa de Matemática do ensino Básico* [10] definiu três objetivos específicos que os alunos deveriam atingir:

- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
- Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações;
- Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações.

O programa menciona ainda que se deve dar também enfase à classificação de sistemas.

Em 2009, foi publicada uma brochura *Álgebra no ensino básico*, pelo Ministério da Educação, com o intuito de apoiar o trabalho dos professores no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico, relativamente ao tema *Álgebra.* A Álgebra assume, assim, uma relevância que antes não tinha nos ensinos básico e secundário e cujo grande objetivo essencial é, como já foi referido, desenvolver nos alunos o pensamento algébrico.

"O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios"[11].

Nessa brochura [11], são explicitados conceitos fundamentais e aspetos específicos relativos à aprendizagem do tópico *Sistemas de duas equações do 1º grau a duas incógnitas*, acompanhados de exemplos de tarefas. Além disto, são fornecidas algumas orientações aos professores. Referem que é importante que, na resolução dos sistemas de equações, "os alunos compreendam a conjunção de condições e a sua interpretação geométrica", que se proporcionem aos alunos "experiências informais" , ou seja, que se deve "evitar, numa fase inicial, a formulação de questões numa linguagem demasiado formalizada" e que esta deve "ser introduzida progressivamente, ajudando os alunos a fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática".

Mais recentemente, em 2013 há uma nova reestruturação que se mantém até hoje. Segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* [12], homologado a 17 de junho de 2013, no 3º ciclo, os conteúdos passaram a estar organizados em cinco domínios:

- Números e Operações
- Geometria e Medida

- Funções, Sequências e Sucessões
- Álgebra
- Organização e Tratamento de Dados.

No domínio *Álgebra* mantém-se o estudo dos sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas, um tema lecionado no 8º ano de escolaridade, e determina que neste tema devem ser abordados, de acordo com o programa acima descrito, os seguintes conteúdos:

- Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas equivalentes;
- Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas;
- Resolução de sistemas de duas equações de 1º grau pelo método de substituição;
- Problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Quanto às *Metas Curriculares do Ensino Básico* [12], homologadas a 3 de agosto de 2012, estas estabelecem os objetivos mais precisos que os alunos devem atingir, no âmbito deste tema e que são os seguintes:

- Designar por «sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas x e y» um sistema de duas equações numéricas redutíveis à forma $ax + by = c$ tal que os coeficientes a e b não são ambos nulos e utilizar corretamente a expressão «sistema na forma canónica».
- Designar, fixada uma ordem para as incógnitas, o par ordenado de números (x_0, y_0) como «solução de um sistema com duas incógnitas» quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0 se obtêm duas igualdades verdadeiras e por «sistemas equivalentes» sistemas com o mesmo conjunto de soluções.
- Interpretar geometricamente os sistemas de duas equações de 1.º grau num plano munido de um referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»)
- Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau pelo método de substituição.
- Resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

3.3 CONTEÚDOS CURRICULARES MATEMÁTICOS

Nesta secção explicitam-se os conceitos matemáticos relativos aos *sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas* e a forma como este tema é ensinado aos alunos, atualmente, no 8º ano, segundo manuais propostos [33], [34], [35], [36] mais recententemente, para este nível de escolaridade.

De salientar que para o estudo do tópico *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* é essencial que os alunos tenham como conhecimentos prévios:

- compreender as noções de equação, de solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
- resolver as equações do 1º grau, aplicando os princípios de equivalência, com parênteses e denominadores;
- classificar as equações;
- identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
- representar gráfica e algebricamente uma função afim;
- traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

3.3.1 CONTEÚDOS TEÓRICOS SOBRE O TEMA

Definição 3.1 *Um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas x e y é a conjunção de duas equações numéricas redutíveis à forma $ax + by = c$ onde os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b não são simultaneamente nulos.*

Exemplo 3.1

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x - \frac{2}{5}y = -2 \end{cases}$$

Note-se que no caso de ambos serem nulos (a e b), na equação $ax+by = c$ da definição 3.1, podemos ter uma equação impossível ou possível e indeterminada respetivamente se c diferente de zero ou igual a zero.

Definição 3.2 *O sistema diz-se na forma canónica quando está escrito na forma* $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ *sendo x e y as incógnitas e a, b, c, d, e e f os coeficientes.*

Exemplo 3.2 *Repare-se que o sistema do exemplo 3.1. encontra-se na forma canónica mas o seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2x = y + 5 \\ -3(5x + 2) + 6y = 2 \end{cases}$$

não, embora se possa reduzi-lo à forma canónica usando as propriedades das operações da adição e multiplicação de números reais e os princípios de equivalência.

Definição 3.3 *Um par ordenado de números* (x_0, y_0) *diz-se solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas se satisfaz ambas as equações. Escreve-se que a solução do sistema é o par ordenado* $(x, y) = (x_0, y_0)$ *ou diz-se que o conjunto solução é* $S = \{(x_0, y_0)\}$.

Definição 3.4 *Dois sistemas lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.*

3.3.2 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS PELO MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

Para se obter a solução de um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas podem usar-se vários métodos analíticos. No entanto, aquele que é indicado pelo *Programa de Matemática* e pelas *Metas Curriculares* do Ensino Básico que os alunos aprendam e explorem no 3º ciclo do Ensino Básico, nomeadamente no 8º ano de escolaridade, é o `Método de Substituição`.

"O método de substituição, indicado pelo *Programa de Matemática*, baseia-se numa das ideias mais poderosas da Álgebra – a possibilidade de substituir uma expressão algébrica por outra equivalente." [11]

De acordo com a brochura *Álgebra no Ensino Básico* [11], este método pode ser sistematizado nos seguintes passos:

1º Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas.

2º Substituir, na outra equação, a expressão encontrada para essa incógnita, obtendo-se uma equação com uma só incógnita. Resolver esta equação para obter o valor da incógnita.

3º Substituir, na outra equação, o valor encontrado para essa incógnita e resolver a equação.

4º Escrever o conjunto solução do sistema.

Antes do 1º passo, os alunos devem verificar se há necessidade de desembaraçar de parênteses e de denominadores, assim como reduzir o sistema à forma canónica para facilitar a resolução do sistema.

Exemplo 3.3

$$\begin{cases} 2x - 6y = -6 \\ -5x - 6y = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3y \\ -5x - 6y = -27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3y \\ -5 \times (-3 + 3y) - 6y = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3y \\ 15 - 15y - 6y = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3y \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$S = \{(3, 2)\}$$

3.3.3 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Definição 3.5 *Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas diz-se impossível quando não admite soluções; possível e determinado quando admite uma única solução; e possível e indeterminando quando admite mais do que uma solução.*

Exemplo 3.4 *Em* $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *verifica-se que o par ordenado (x,y)=(6,4) é a única solução do sistema. Logo, este sistema é possível e determinado.*

Exemplo 3.5 *O sistema* $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ *é um sistema equivalente a* $\begin{cases} y = 6 - x \\ 0 = 12 \end{cases}$. *Verifica-se, assim, que este não admite solução, logo é um sistema impossível e o seu conjunto solução corresponde ao conjunto-vazio* $S = \{\}$.

Note-se que, facilmente, no início da resolução se podia concluir que este sistema é impossível porque $3x + 3y = 6 \Leftrightarrow x + y = 6$, *logo as equações* $3x + 3y = 6$ *e* $x + y = 6$ *são incompatíveis. É possível encontrar solução para x e y que satisfaça apenas uma das equações, mas que não existe nenhum par ordenado que satisfaça as duas equações simultaneamente.*

Exemplo 3.6 *O sistema* $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$ *equivalente a* $\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 0 = 0 \end{cases}$ *tem uma infinidade de soluções, tais como: (0,1), (1,-2) , (2,-5), (-1,4). Por conseguinte diz-se que é um sistema possível e indeterminado. O conjunto solução é dado por*

$S = \{(x, 1-3x), x \in \mathbb{R}\}$. *Repare-se que, também, no início da resolução do sistema, se podia constatar que* $6x + 2y = 2 \Leftrightarrow 3x + y = 1$ *e, imediatamente, concluir-se que o sistema era possível e indeterminado.*

Esta classificação de sistemas pode ser interpretada *geometricamente*. Para tal, é importante que os alunos tenham conhecimentos sobre funções afim, conceitos dados no 7º e no 8º anos de escolaridade antes do tema *Sistemas de Equações Lineares*. Deste modo, antes de começar a análise geométrica de um sistema é necessário fazer uma pequena abordagem às funções afim, de acordo com os manuais propostos atrás já mencionados e alguns do 7º ano de escolaridade [37], [38], [39], [40].

Definição 3.6 *Uma função* f *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *diz-se linear se existe um número real* a *tal que* $f(x) = ax$ *para todo o* $x \in \mathbb{R}$ *e* a *é o coeficiente da função linear.*

O gráfico desta função é uma reta, não perpendicular ao eixo Ox, que passa pela origem do referencial cartesiano e o coeficiente a representa o declive da reta.

Se o declive da reta é positivo ($a > 0$) a reta está contida nos primeiro e terceiro quadrantes, caso contrário ($a < 0$) a reta está contida nos segundo e quarto quadrantes.

Definição 3.7 *Uma função* f *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *diz-se constante se existe um número real* b *tal que* $f(x) = b$ *para todo o* $x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função constante, é uma reta paralela ou coincidente ao eixo Ox que passa pelo eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, b)$. b representa a ordenada na origem.

Definição 3.8 *Uma função* f *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *diz-se afim se existem números reais* a *e* b *tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo o* $x \in \mathbb{R}$.

Os gráficos de uma função afim representam-se por retas não perpendiculares ao eixo Ox.

Note-se que a função afim é a soma de uma função linear com uma constante. Logo, são casos particulares de uma função afim as funções lineares e constante.

De salientar, que duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

Posto isto, um sistema de duas equações com duas incógnitas pode ser representado graficamente por duas retas, ou seja, por duas funções afim cujos gráficos são retas e o número de soluções do sistema depende da posição relativa das duas retas.

Neste nível de ensino, 8º ano de escolaridade, as retas são traçadas a partir da equação da reta na forma reduzida $y = ax + b$ onde a representa o declive da reta e b a ordenada na origem. Por isso, para representar graficamente o sistema de equações, resolve-se cada uma das equações em ordem a y e depois traçam-se as retas correspondentes no mesmo referencial.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c-ax}{b} \\ y = \frac{f-dx}{e} \end{cases}$$

De notar que e e b são não nulos. Caso um deles seja nulo, por exemplo se $e = 0$ obtém-se que $dx + ey = f \Leftrightarrow x = \dfrac{f}{d}$ cujo gráfico corresponde a uma reta vertical.

Se as retas são *concorrentes*, ou seja, se as duas retas que representam graficamente o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas têm um único ponto em comum, então o sistema tem uma única solução que corresponde às coordenadas do ponto de interseção das duas retas. Esse ponto faz parte do conjunto solução das duas equações.

Exemplo 3.7

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5-x}{2} \\ y = \frac{4+2x}{3} \end{cases} \tag{3.1}$$

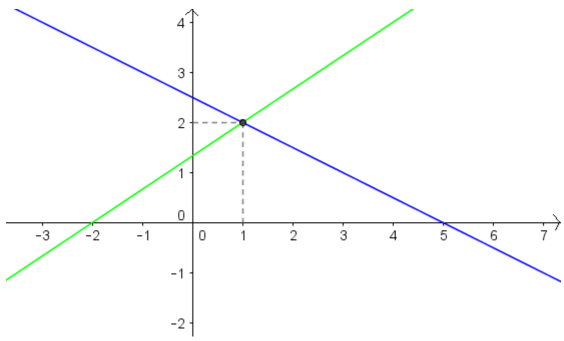

Figura 3.1: Representação gráfica do sistema 3.1

Como o ponto de interseção das duas retas é o ponto de coordenadas $(1, 2)$, *o conjunto solução do sistema é* $S = \{(1, 2)\}$. *Logo, o sistema é possível e determinado.*

Se as retas são *estritamente paralelas*, ou seja, se as retas que representam graficamente o sistema de equações não têm qualquer ponto em comum, então o sistema não tem solução.

Exemplo 3.8

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6-x}{3} \\ y = \frac{10-2x}{6} \end{cases} \tag{3.2}$$

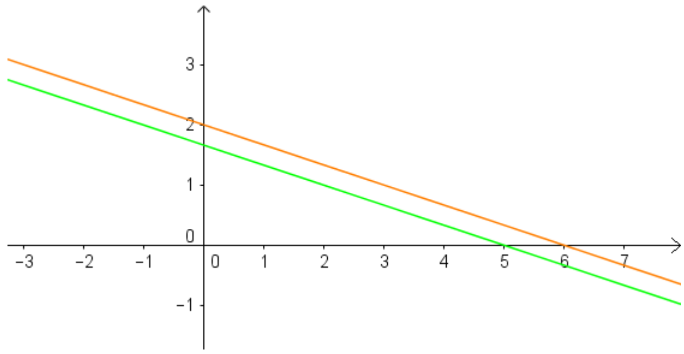

Figura 3.2: Representação gráfica do sistema 3.2

O conjunto solução é o conjunto-vazio, ou seja, $S = \{\}$. Logo, o sistema é impossível.

Se as retas são *coincidentes*, ou seja, se as duas retas que representam o sistema de equações têm todos os pontos em comum, o sistema tem uma infinidade de soluções.

Exemplo 3.9

$$\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 2x - 4y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8+x}{2} \\ y = \frac{2x+16}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8+x}{2} \\ y = \frac{x+8}{2} \end{cases} \tag{3.3}$$

Repare-se que as duas equações do sistema são iguais, ou seja, têm o mesmo declive e a mesma ordenada na origem.

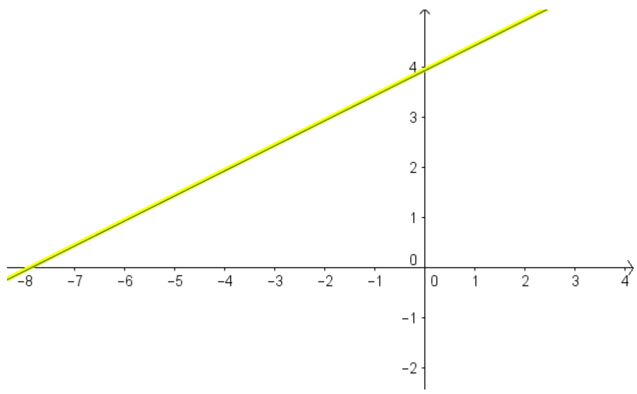

Figura 3.3: Representação gráfica do sistema 3.3

Os pares ordenados correspondentes às coordenadas dos pontos da reta de equação $y = \frac{x+8}{2}$ são soluções do sistema, ou seja, $S = \{(x, \frac{8+x}{2}), x \in \mathbb{R}\}$. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

3.3.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os alunos devem "desenvolver a sua capacidade de resolver problemas em contextos matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados" [10].

Atualmente, o programa de matemática preconiza que seja dado um enfoque muito significativo à resolução de problemas. Esta vertente do ensino-aprendizagem é de importância crucial porque potencia, nos alunos, novas capacidades e competências extremamente úteis, nomeadamente aquisição de um pensamento autónomo, sentido de persistência, espírito de curiosidade, espirito crítico, etc..

Também neste tópico *Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas* os alunos devem resolver problemas matemáticos que envolvam os conteúdos relacionados com o tópico. Assim, na resolução dos problemas, os alunos devem ter em atenção o seguinte:

1º Ler e interpretar o enunciado de modo a identificar as incógnitas e representá-las por letras.

2º A partir da informação dada estabelecer relações e escrever as equações que traduzem as condições dadas, ou seja, traduzir o enunciado através de um sistema de equações.

3º Resolver o sistema.

4º Analisar as soluções do sistema no contexto apresentado, ou seja, verificar se a solução do sistema serve como solução do problema e responder ao problema.

3.4 DIFICULDADES E ERROS DOS ALUNOS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

De acordo com Vale [41], citando Popper "É impossível evitar todos os erros, nem sequer aqueles que em si mesmos são evitáveis. Todos os cientistas cometem equívocos continuadamente... Os erros podem permanecer ocultos ao conhecimento de todos, inclusive às nossas teorias mais comprovadas. Portanto, temos que mudar a nossa atitude face aos nossos erros. É aqui onde há que começar a nossa reforma prática da ética... O novo princípio básico consiste em evitar os equívocos a partir da aprendizagem que fazemos dos nossos próprios erros".

O professor, quando observa a forma como os alunos resolvem uma determinada questão, deve refletir sobre os seus processos de ensino-aprendizagem. A partir daí os professores podem ajudar, mais eficazmente, os alunos a ultrapassar as suas dificuldades, implementando, se necessário, outras metodologias, outro tipo de intervenção, outra forma de explicitar um determinado conteúdo matemático.

Um aluno pode errar por distração ou por não entender o que é pedido. Se simplesmente errou por desatenção pode corrigir facilmente o processo. Caso contrário é necessário que o aluno faça uma análise dos seus próprios erros, com a ajuda do professor, para que compreenda melhor o porquê de ter errado, para que esse erro não se repita noutros exercícios.

Desde o término da licenciatura a autora desta dissertação tem o privilégio de lidar com alunos, como professora e explicadora, e, como tal, vai-se apercebendo das dificuldades e dos erros mais comuns dos alunos. Constata que as dificuldades são imensas e reconhece que são, essencialmente, na área de Álgebra.

A Álgebra, é considerada por muitos uma área rica e importante da Matemática e Santos [42], aquando do seu estudo, afirma, igualmente, que é na sua aprendizagem que residem algumas das maiores dificuldade dos alunos.

Saraiva [43] menciona que "O pensamento algébrico envolve, por um lado, a capacidade de cálculo e a capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas usando os símbolos algébricos na resolução de problemas, e, por outro lado, envolve a capacidade de generalizar.", ou seja, a Álgebra tem determinado grau de abstração, sendo, por isso, um dos obstáculos para a maior parte dos alunos.

É fundamental que os professores tenham noção das dificuldades dos alunos de forma a minimizá-las, bem como eventuais erros inerentes. É essencial que se analisem os erros dos alunos e os acompanhem no processo da construção do conhecimento.

De seguida, sistematiza-se algumas das dificuldades, sobretudo, na área da Álgebra, nomeadamente as relacionadas com pré-requisitos que os alunos deveriam dominar antes de se abordar o tópico *Sistemas lineares do 1º grau com duas equações.* Era essencial que os alunos tivessem esses conhecimentos prévios. No entanto, muitos deles não os têm e daí advêm mais dificuldades na resolução dos sistemas.

3.4.1 ALGUMAS DIFICULDADES E ERROS GERAIS

Vale [41], citando Radatz "apresenta uma classificação de cinco categorias, dos erros cometidos pelos alunos, tendo por base a atividade matemática:

(1) erros cometidos por dificuldades de linguagem;
(2) erros cometidos por dificuldades na obtenção de informações espaciais;
(3) erros cometidos pelo domínio deficiente de pré-requisitos de habilidades, factos e conceitos;
(4) erros cometidos por associações incorrectas ou rigidez do pensamento e

(5) erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes."

Veja-se então alguns exemplos desses erros e dificuldades.

Muitos alunos têm dificuldade em compreender o conceito de variável e de atribuírem um significado a uma letra existente numa expressão, como, por exemplo, pensar nessa letra como sendo um número especifico mas desconhecido (por exemplo, $4x = 20$) ou pensar que pode assumir um conjunto de valores (por exemplo, $A = b \times a$).

Em aritmética, os alunos lidam com letras mas de maneira diferente da álgebra. Estas, normalmente, aparecem como unidades de medida de alguma grandeza (por exemplo 5m; 7l; 10A; querendo dizer respetivamente 5 metros, 7 litros e 10 amperes). Em álgebra, segundo Rocha [25], citando Nogueira "as letras são utilizadas para representar: valores numéricos desconhecidos (incógnitas) os quais serão encontrados por meio da resolução de equações; variáveis que podem assumir qualquer valor dentro de um domínio de validade e em uma representação geral de uma representação particular. Por exemplo, a equação $x + a = b$ representando equações do tipo $x + 130 = 400$".

Distinguir adição aritmética (por exemplo, $6 + 3$) da adição algébrica (por exemplo, $x + 9$) é também um fator gerador de dificuldades nos alunos. Estes não entendem símbolos e sinais que a aritmética e a álgebra têm em comum e que o significado deles depende do contexto onde estão inseridos, tais como o "=", o "+" , o "-" e o "×". Relativamente ao sinal de igual, este na Álgebra pretende relacionar algo, como, por exemplo, numa equação que relaciona o 1º membro com o 2º membro no sentido de equilíbrio entre os membros (por exemplo, $x + 8 = -12$), ou como, por exemplo, numa expressão algébrica em que o igual representa uma espécie de equivalência entre duas expressões (por exemplo, $-2(x + 6) = -2x - 12$). Em suma, em álgebra o "=" define uma condição onde o x satisfaz um valor para a igualdade e na Aritmética o sinal de "=" tem um conceito diferente sendo associado a uma operação que é necessária efetuar e que conduz a um resultado numérico (por exemplo, $2+3 = 5$). Para os alunos é difícil aceitar que a resposta a uma questão pode ser um número ou uma expressão algébrica.

A manipulação e a simplificação de expressões é outra questão que suscita normalmente muitas dúvidas aos alunos. Alguns tendem a pensar que é a sequência escrita de operações que determina a ordem pela qual se deve resolver uma expressão numérica, ou seja, pensam, por exemplo que $2 + 3 \times 4$ é igual a 20 em vez de ser 14.

Aliado a isto, como os alunos têm dificuldades em adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números reais, surgem ainda mais problemas na adição de termos semelhantes num polinómio. Adicionam, por vezes, incorretamente os coeficientes dos termos semelhantes, como por exemplo $5x - 10x$ sendo $15x$ e não igual a $-5x$ e, por vezes, adicionam, também incorretamente, termos que não são semelhantes, como nos seguintes casos que para muitos $9xyz - y$ é igual a $9xz$ e $9 - y$ é igual a $8y$ ou $-9y$.

Outra dificuldade que os alunos revelam, frequentemente, é na existência de parênteses numa expressão. Muitas vezes estes são ignorados. Por exemplo, $2(3 + x)$ é, para alguns, igual a $6 + x$ em vez de $6 + 2x$.

A influência de um sinal menos antes de um traço de fração e antes de um parênteses é, com bastante frequência, também desconsiderado. Consequentemente podem levar a um desembaraçar de parênteses e de denominadores incorreto, como por exemplo $2 - (5 - x)$ para muitos é, erradamente, o mesmo que $2 - 5 - x$ e $-\frac{2-x}{5}$ igual a $\frac{-2-x}{5}$.

Existem alunos que também confundem os conceitos *expressões algébricas* e *equações*. Por vezes, na resolução de expressões algébricas acrescentam o "$= 0$", transformando-as erradamente numa equação.

Na resolução de equações do primeiro grau surgem também algumas falhas por parte dos alunos. Estes nem sempre quando mudam um termo de membro lhe mudam o sinal, chegando, assim, a uma solução da equação incorreta, como se verifica nos seguintes exemplos: $3x - 1 = 5 \Leftrightarrow 3x = 5 - 1$ e $-2x = 5 - 3x \Leftrightarrow -2x - 3x = 5$. Também acontece terem uma equação do tipo $x + 6 = 3$ e acharem que a operação da divisão é a inversa da adição e apresentam $x = \frac{3}{6}$.

Nas equações do tipo $ax = b$, por vezes, também não aplicam a regra prática da resolução da equação corretamente. Um erro extremamente comum é indicarem que $2x = 10$ é equivalente a $x = \frac{10}{-2}$, ou seja, entendem erradamente que o dois mudou de membro então mudam-lhe o sinal. Outro erro regular é não aplicarem a operação inversa correta, sendo para eles, por exemplo, $-2x = 10$ equivalente a $x = 10 + 2$, ou seja, utilizam a operação de adição como sendo a inversa da operação da multiplicação em vez de considerarem $-2x = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{2}$, ou, como por exemplo, equivocadamente dizerem que $-2x = 10$ é equivalente a $x = 10 - 2$. Por vezes, também acontece nas equações do tipo $ax = b$ trocarem os coeficientes dos respetivos termos, como por exemplo, entenderem que $2x = 10$ é equivalente a $x = \frac{2}{10}$. Um erro também clássico é, por exemplo, acharem que $2x = 20$ é equivalente $\frac{2x}{2} = \frac{20}{20}$, dividem ambos os membros pelos respetivos coeficientes dos termos, em vez de dividirem ambos os membros por 2.

No que concerne às equações literais com duas variáveis, há alguns alunos que não as reconhecem como equações do 1º grau com duas incógnitas e, portanto, têm dificuldades em resolvê-las em ordem a uma dessas incógnitas. Por vezes, também julgam erradamente que uma solução desta equação é simplesmente um número, ou seja, não admitem que corresponde a um par ordenado de números e que tem, normalmente, uma infinidade de soluções.

Outro erro comum dos alunos, tal como se refere em *Álgebra no Ensino Básico* de João da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos [11], é fazerem a separação entre a parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica. Conforme o exemplo lá descrito, a aluna considerou que $P = A + (A + 3) + (A \times 2)$ era o mesmo que ter $P = 3A + 3 \times 2$.

Outra das dificuldades notórias que os alunos demonstram é na tradução da linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa. Rocha [25], citando Lochhead e Mestre menciona ainda que a maior dificuldade descrita é "tradução da linguagem natural para a linguagem matemática em que se tenha que relacionar duas variáveis e escrever a equação que expressa essa relação".

Por último, os alunos costumam sentir, uma dificuldade ainda não mencionada mas não menos relevante: na adição e subtração de números fracionários com denominadores diferentes. Têm tendência a somar ou subtrair os numeradores, repetindo a mesma operação para os denominadores, como por exemplo, $\frac{2x}{3} + \frac{x}{5}$ que para muitos é igual a $\frac{3x}{8}$.

Ainda relativo a denominadores, na simplificação de equações em que se precisa de reduzir todos os termos de uma equação ao mesmo denominador acontece, por vezes, também se esquecerem de reduzir pelo menos um dos termos, como por exemplo $\frac{3x}{2} + \frac{1}{5} = 3 \Leftrightarrow 15x + 2 = 3$.

Todos os problemas aqui enumerados, quando não são devidamente superados, vão refletir-se na aprendizagem de matérias que envolvem estes conhecimentos, nomeadamente neste caso na resolução dos sistemas.

É importante salientar que os testes diagnósticos são uma mais valia no início de cada unidade porque permitem analisar os conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos, detetar as lacunas que estes apresentam relativamente aos conhecimentos que deveriam ter sido adquiridos antecipadamente, para de seguida tentar ultrapassá-los.

3.4.2 DIFICULDADES E ERROS DOS ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

Segundo a brochura *Álgebra no Ensino Básico* [11], as principais dificuldades dos alunos no trabalho com sistemas de equações podem agrupar-se "em três grandes categorias:

(1) compreender a noção de sistema e a natureza da solução de um sistema de equações;
(2) compreender os processos de resolução de sistemas de equações e ser capaz de os executar correctamente até obter a solução;
(3) ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas."

É oportuno ressalvar que na resolução de sistemas de equações surgem dificuldades por parte dos alunos devido, essencialmente, ao não domínio da resolução de equações do 1º grau, uma vez que nem sempre sabem aplicar devidamente os princípios de equivalência. Obviamente, esta falta de noções de conceitos essenciais e de outros que deviam já estar consolidados, nomeadamente vários conceitos algébricos, geram uma dificuldade acrescida na apropriação de outros conhecimentos.

Repare-se no seguinte exemplo onde se resolve passo a passo um sistema de equações lineares através do método de substituição, com o intuito de, a seguir, se analisar os passos onde os alunos poderão sentir mais dificuldades e, eventualmente, errar.

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \overset{2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ 5 \times (-1 + 3y) - 6y = 4 \end{cases} \overset{3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ -5 + 15y - 6y = 4 \end{cases}$$

$$\overset{4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ 15y - 6y = 4 + 5 \end{cases} \overset{5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ 9y = 9 \end{cases} \overset{6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ y = \frac{9}{9} \end{cases} \overset{7}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3y \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\overset{8}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3 \times 1 \\ y = 1 \end{cases} \overset{9}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = 1 \end{cases} \overset{10}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$S = \{(2, 1)\}$

As dificuldades sentidas pelos alunos influenciam o prosseguimento da resolução do sistema e podem levar a um falso conjunto solução.

A primeira dificuldade pode surgir logo na escolha da incógnita que deve ser isolada. `(Passo 1)` Há alunos que não refletem sobre a escolha mais prática que, neste caso, seria resolver a primeira equação em ordem a x e obter $x = -1 + 3y$. Se optassem por resolver em ordem a y iriam tornar a resolução do sistema mais complicada.

De seguida, tendo a equação $x = -1 + 3y$ o obstáculo é "visualizar" a expressão $-1 + 3y$ como sendo o valor de x e substitui-la corretamente pelo x na segunda equação. `(Passo 2)` Por vezes, como têm esta dificuldade de ver a expressão como um "valor único" tendem a simplificá-la, erradamente, e adicionar os termos não semelhantes, por exemplo acharem que $-1+3y$ é igual a $2y$.

Ainda a este respeito, os autores da brochura [11] salientam que "certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da *transitividade do sinal de igual*, quando se depararam com duas equações". Ainda dão como exemplo: "$4x-3=y$ e $6x+7=y$" e referem que os alunos "Não conseguem reconhecer a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma possível interpretação alternativa tem a ver com a incapacidade dos alunos para substituir o y na primeira equação pela expressão igual da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os y's como sendo diferentes."

Sónia Silva [44] também constata, no seu estudo, que, perante esta dificuldade, existem alunos que simplesmente "não continuam a resolver o sistema, tendo dificuldades em perceber que o próximo passo a ser feito é o de substituição". Refere ainda que aqui está patente a dificuldade que muitos alunos possuem relativamente ao facto de considerarem uma expressão, neste caso $-1+3y$, como sendo o valor de x.

No que respeita ainda à substituição, quando os alunos a efetuam, tendem a esquecer a utilização de parênteses ao substituírem a expressão equivalente de x na segunda equação. `(Passo 2)` Colocam simplesmente $5\times(-1)+3y-6y=4$ em vez de $5\times(-1+3y)-6y=4$ ou então substituem corretamente a incógnita pela expressão obtida mas voltam a escrever o monómio $5x$ e fica $5\times(-1+3y)+5x-6y=4$. Perante esta última incorreção, como constatou Rosa Dias [45], os alunos que a fazem têm tendência a adicionar termos semelhantes com termos não semelhantes de forma a ficarem apenas com uma das incógnitas, como por exemplo $-5+15y+5x-6y=4$ acharem que é equivalente a $-5+20y-6y=4$.

Caso os parênteses sejam bem colocados, os alunos podem aplicar incorretamente a operação distributiva ou nem sequer chegar a aplicá-la. `(Passo 3)` Por exemplo, julgarem que $5(-1+3y)-6y=4$ é equivalente a $-5+3y-6y=4$ ou a $5-1+3y-6y=4$. Ainda relativamente a este passo, é importante ressalvar que, por vezes, no desembaraçar de parênteses os alunos não sabem operar com números reais e erram as regras de sinais, como por exemplo ter $-5(-1+3y)-6y=4$ para alguns alunos é, erradamente, equivalente a $-5+15y-6y=4$.

Ao longo da resolução do sistema a dificuldade que persiste é a aplicação correta dos princípios de equivalência. Isto pode evidenciar-se, por exemplo, logo no `Passo 1` quando se resolve a primeira equação em ordem a uma das incógnitas ou na resolução da equação $-5+15y-6y=4$ com o intuito de descobrir o valor numérico de y. `(Passos 4 e 6)` Por exemplo, ao transporem o termo -5 para o segundo membro há alunos que nem sempre lhe trocam o sinal e erradamente colocam $15y-6y=4-5$, outros julgam que a operação inversa da multiplicação é a adição e colocam que $9x=9 \Leftrightarrow y=9+9$.

Caso os alunos tenham dificuldade em operar com números reais, esta dificuldade pode refletir-se, também, na adição de termos semelhantes. Por exemplo, $-6y+15y=4+5$ pode resultar erradamente em $-9y=9$ ou $-21y=9$. `(Passo 5)`

Quando os alunos encontram o valor numérico de uma das incógnitas nem sempre sabem o que devem fazer de seguida e param de resolver o sistema ou substituem o valor da incógnitas de forma errada. `(Passo 8)` Por exemplo, escreverem $x=-1+3+1$ em vez de $x=-1+3\times 1$

Há que ter em conta que este sistema já se encontra na forma canónica, caso contrário a dificuldade da resolução do sistema aumentaria.

No que se refere ao conjunto solução do sistema, $S=\{(2,1)\}$, há alunos que apesar de terem chegado à conclusão correta $x=2$ e $y=1$ registam o conjunto solução errado, porque escrevem primeiro a ordenada e só depois a abcissa, ou seja, indicam que $S=\{(1,2)\}$.

Também na resolução de problemas as dificuldades se evidenciam. Como prova do referido há um estudo de 2012 realizado com alunos do 8º ano de escolaridade pela professora Vanessa Santos [42] relativo ao tema "Resolução de problemas envolvendo Sistemas de equações de 1º grau a duas incógnitas". Esta professora constatou que nos diferentes problemas propostos aos alunos foram manifestadas imensas dificuldades. Salienta ainda que "Em todos os problemas, com exceção daquele em que as incógnitas são definidas no enunciado, nota-se a existência de dúvidas e hesitações na definição do significado de cada incógnita (...). Outra dificuldade frequentemente detetada é a compreensão da situação descrita no enunciado do problema. Perante os enunciados com frases mais longas e complexas verifica-se uma maior solicitação da ajuda da Professora. Os erros de interpretação têm como consequência erros na passagem de linguagem natural para a linguagem matemática, ou seja, os alunos estabelecem de forma incorreta as relações entre as incógnitas.".

Em suma, traduzir um problema dado em linguagem natural para linguagem matemática na forma de um sistema de equações é um dos grandes dilemas para a maioria dos alunos. É necessário que interpretem os enunciados, mas, muitas vezes, não entendem, sequer, o que é solicitado. Devem identificar, igualmente, as incógnitas do problema, mas muitas vezes, tal como descreve a professora Vanessa Santos [42], os alunos questionam o professor relativamente às incógnitas “O que é o x? E o y?”. Após este passo, outra dificuldade que se pode verificar é nomeadamente na concretização da escrita matemática do sistema de equações e, no final, a interpretação da solução no contexto do problema.

Perante tantas dificuldades os alunos têm tendência a evitar a resolução de problemas sobre sistemas. De acordo os autores da brochura *Álgebra no Ensino Básico* [11], estas podem ter múltiplas origens, tais como “falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, o estabelecimento de relações incorrectas entre as duas linguagens, a simples distracção ou o foco em pistas enganadoras. Para além disso, envolvem uma dificuldade acrescida – a noção de conjunção de condições.”

Após a tradução do problema para um sistema de equações e da sua resolução, é necessário, tal como foi referido anteriormente, que dêm uma resposta ao problema exposto. É, muitas vezes, neste ponto que surgem mais obstáculos, uma vez que se tem que ter em atenção se a solução do sistema é também solução do problema e se esta solução faz sentido no contexto do problema apresentado.

A professora Sónia Silva [44], durante a sua análise das dificuldades dos alunos aquando da resolução analítica de um sistema, descreve outro erro bastante frequente dizendo que quando os alunos obtêm “uma equação do tipo $0x = 0$ por vezes cometem o tradicional erro de considerar que $x = 0$ e continuam a resolver normalmente o sistema”.

Esta mesma autora [44] também refere o seguinte: “o erro denominado por classificação incorreta do sistema, tal como o próprio nome indica, está relacionado com a classificação de sistemas” e “este erro surge quando os alunos não são capazes de interpretar a solução ou soluções do sistema, quer tenham utilizado métodos analíticos ou gráficos, classificando, deste modo, incorretamente o sistema”. Ainda sublinha que, por vezes, os alunos quando têm as equações $x = 0$ e $y = 0$ classificam-no como sendo um sistema possível e indeterminado e quando uma das equações do sistema é do tipo $-8x = 0$ classificam-no como um sistema impossível.

Para a construção de um gráfico de um sistema a partir das expressões analíticas é necessário vários passos. Por exemplo, ao isolar cada uma das equações em ordem a y há alunos que erram. De seguida, ao construírem o gráfico nem sempre o fazem de forma rigorosa, nomeadamente na escala que utilizam, na marcação das coordenadas e ao traçarem as respetivas retas. Se o gráfico de uma das equações do sistema corresponde a uma reta vertical, normalmente o aluno ainda sente mais dificuldade a traçá-la. Aliado a isto, nem sempre identificam que x corresponde à variável independente e y à variável dependente.

Representar pares ordenados no referencial cartesiano é também, por vezes, um problema. Nem sempre conseguem identificar pontos do referencial cartesiano. Tal como menciona a autora Dalila Silva [26], "indicar apenas uma das coordenadas, confundindo as coordenadas de um ponto com o valor da ordenada desse ponto" é um erro muito frequente dos alunos. Às vezes, confundem o valor da abcissa com o valor da ordenada e trocam a sua ordem, ou os sinais do valor de um deles, ou julgam que um par ordenado de números representam dois pontos e não apenas um. Se a coordenada de um ponto estiver situado num dos eixos coordenados também é um motivo de preocupação porque nem sempre o sabem representar corretamente.

Por último, outra dificuldade que, por vezes, cometem é relativa à interpretação da solução obtida geometricamente. Há alunos que, num sistema possível e determinado, ao apresentarem a respetiva solução, que corresponde ao ponto de interseção das duas retas, o fazem erradamente. A professora Rosa Dias [45] no seu estudo também constatou este facto e refere que "mesmo os alunos que sabem construir gráficos demonstram dificuldade em interpretar corretamente o resultado obtido, não fazendo distinção entre coordenadas de pontos e pontos".

Após a enumeração dos vários erros e dificuldades, sobre o tema em causa, que afetam a aprendizagem dos alunos é imperioso refletir sobre as formas de ultrapassar estas situações. Surge, aqui, um grande desafio aos professores. Estes devem conhecer os vários tipos de erros cometidos e dispor das suficientes competências para, num clima de empatia, criarem condições para prevenirem esses erros e ajudarem na sua resolução.

A análise dos erros não pode, nem deve ser adiada. Deve ser feita em tempo útil para ser eficaz, evitando, assim, a sua consolidação e a acumulação interiorizada de raciocínios incorretos. Por exemplo, pode-se realizar um teste diagnóstico no início do ano letivo para detetar algumas das lacunas dos alunos e no início de cada tema podem ser relembrados alguns dos pré-requisitos necessários à abordagem do mesmo.

CAPÍTULO 4

Construção dos recursos digitais

Na elaboração desta dissertação um dos principais objetivos foi a construção de recursos digitais de apoio ao ensino dos *Sistemas Lineares no 3º ciclo do Ensino Básico*, nomeadamente exercícios parametrizados de escolha múltipla com as respetivas resoluções.

Neste capítulo aborda-se todo o processo de construção desses recursos digitais, começando, inicialmente, por descrever o que é um exercício parametrizado e qual a sua composição, bem como as vantagens associadas. De seguida, explicita-se toda a tecnologia envolvida na construção dos mesmos: o *software* Sage Mathematics, a linguagem de programação Python, o processador de texto LaTeX e as plataformas MEGUA e SIACUA. Por último, são dados alguns exemplos dos exercícios construídos de escolha múltipla.

4.1 exercícios parametrizados

Os recursos digitais construídos no âmbito desta dissertação são exercícios parametrizados onde se especificam parâmetros que depois são escolhidos aleatoriamente pelo computador de entre um conjunto de valores que se pré-definem. Obtém-se, desta forma, um conjunto diferente de exercícios gerados pelo mesmo modelo, ou seja, questões semelhantes com parâmetros que podem assumir diferentes valores.

Tome-se como exemplo a geração parametrizada de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas do tipo $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ onde a, b, c, d, e e f são parâmetros gerados aleatoriamente de entre um conjunto pré-definido tal como, por exemplo, sendo

$a \in [0,9]$, $b \in [-9,-1]$, $c \in \{-1,1\}$, $d \in [2,5]$, $e \in [0,9]$ e $f \in \{-2,0\}$. Desta forma, podem-se obter sistemas semelhantes mas com parâmetros que podem ter valores diferentes. Uma possível concretização deste sistema é

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 9y = -2 \end{cases}$$

Para a criação de um exercício parametrizado obedece-se à seguinte estrutura:

- sumário (SUMMARY);
- texto do enunciado (PROBLEM);
- texto da resposta (ANSWER).

No sumário deve-se catalogar o exercício de acordo com a classificação MSC2010 (Mathematics Subject Classification). Por exemplo, um exercício sobre os Sistemas de Equações Lineares será catalogado em `E97H30 Equations and inequalities: Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas`. Ainda no sumário, associam-se palavras-chaves que são úteis para fazer pesquisas de exercícios.

No texto do enunciado e no texto da resposta utilizam-se parâmetros que podem ser identificados por letras ou letras e números e podem ser substituídos por valores numéricos ou funções. No texto de resposta constam duas partes: a escolha múltipla e a resolução detalhada do exercício.

Vejamos um exemplo de um exercício construído sobre este tema no âmbito deste trabalho. O sumário pode ver-se na figura 4.1, o texto do enunciado na figura 4.2 e o texto da resposta na figura 4.3.

```
%SUMMARY Equações; Sistemas de equações; Resolução analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities: Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave: Sistemas de equações lineares;  Sistemas de duas equações a duas incógnitas;
Classificação de sistemas;  sistema possível e determinado
```

Figura 4.1: Sumário do exercício

Neste caso (Figura 4.1), verifica-se que `Sistemas de equações lineares; Sistemas de duas equações a duas incógnitas` são algumas das palavras-chaves escolhidas para representar o exercício. Além disto, há uma breve descrição do mesmo, como por exemplo: `Resolução analítica de sistemas de duas equações a duas incógnitas`. A acrescentar a isto segue a classificação MCS 2010, que foi obtida consultando as subáreas 97-XX e a classificação completa em msc2010.org. [46]

```
%PROBLEM Substituindo variáveis
Considere o seguinte sistema de equações:

    $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle mem11=mem12\\
    \\
    \displaystyle mem21=mem22
    \end{array} \right.$$

O par ordenado que corresponde à solução do sistema é:
```

Figura 4.2: Texto do enunciado

Neste exemplo (Figura 4.2), o texto do enunciado solicita aos alunos que indiquem qual o par ordenado que corresponde à solução do sistema. Os parâmetros **mem11**, **mem12**, **mem21** e **mem22** vão ser substituídos automaticamente por números ou expressões numéricas, como mostra o exemplo na figura 4.4.

```
%ANSWER
   <multiplechoice>
<choice> $$\displaystyle \left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err11,err12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err21,err22\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err31,err32\right)$$ </choice>
</multiplechoice>


Pretende-se que a primeira equação seja resolvida em ordem a $x$ e a segunda em ordem a $y$.
Resolvendo, obtém-se que:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle mem11=mem12\\
    \\
    \displaystyle mem21=mem22
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=cor11\\
    \\
    \displaystyle y= cor12
    \end{array} \right.$$


Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$
```

Figura 4.3: Texto da resposta

Neste texto de resposta (Figura 4.3), constata-se que este contém um bloco de escolha múltipla com 4 alternativas, sendo a primeira a resposta correta. De salientar que os alunos quando têm acesso ao exercício a resposta correta aparece na lista de escolhas numa ordem aleatória e não necessariamente em primeiro lugar. De seguida, verifica-se que o texto de resposta é composto pela resolução detalhada do sistema de equações.

Problema

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -x = 2 \\ -7\,y = -6 \end{cases}$$

O par ordenado que corresponde à solução do sistema é:

Resolução

Escolha:

$$\left(-2, \frac{6}{7}\right)$$

Escolha:

$$\left(\frac{6}{7}, -2\right)$$

Escolha:

$$\left(2, -\frac{6}{7}\right)$$

Escolha:

$$(3, 1)$$

Figura 4.4: Exemplo de um exercício de escolha múltipla

Na secção 4.5 irá ser explanado a parte correspondente à programação em Python.

É conveniente salientar que para cada exercício, a seleção do seu enunciado foi feita tendo como base o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas*, de acordo com o que é lecionado no 8º ano de escolaridade. Cada enunciado foi formulado de forma clara e objetiva.

Para a escolha de distratores (alternativas erradas das perguntas de escolha múltipla) plausíveis e adequados foram tidas em conta as dificuldades dos alunos, mencionadas no capítulo anterior, e as respostas que teriam caso as perguntas fossem de desenvolvimento.

Após a escolha da resposta à questão de escolha múltipla, o aluno recebe, automaticamente, um *feedback* informando se a sua resposta é correta ou incorreta, seguido, caso erre, de uma resolução detalhada do exercício onde poderá analisar e compreender melhor as razões do seu erro.

É essencial que os alunos não ignorem os erros que cometem, que compreendam porque os fizeram, que descubram as coisas por si mesmos, que identifiquem contradições e tomem consciência dos erros que possam ser simplesmente de falta de atenção ou erros que revelem falta de compreensão de conceitos importantes.

Utilizando estes recursos digitais, os alunos podem:

- resolver os exercícios num ritmo próprio e fazer a gestão da sua própria aprendizagem;
- consultar a resolução detalhada de cada um dos exercícios;

- resolver diversos exercícios idênticos até terem a certeza que ultrapassaram as suas dificuldades, ou seja, aceder, de forma sistemática, a um tipo de exercício, ou ligeiramente diferente, e repeti-lo até terem a certeza que dominam o seu conteúdo;
- auto-avaliar-se e, consequentemente, tornarem-se mais autónomos e mais responsáveis.

A crescente disponibilidade de equipamentos, para além dos computadores, com acesso à Internet, permite que a aprendizagem dos alunos se faça quer em contexto de sala de aula, quer em casa ou noutro contexto informal. Portanto, os alunos podem aceder a estes recursos digitais fora da sala de aula e fora da escola quando e sempre que quiserem.

Por sua vez, os professores podem aceder ao registo de trabalho do aluno, detetar onde ele está pior e ajudá-lo. Podem, igualmente, utilizar os recursos digitais como um apoio às suas aulas sem necessidade de construírem, por diversas vezes, o mesmo tipo de exercício e, desta forma, ganham tempo para outras tarefas.

É essencial que o professor, antes de disponibilizar esses recursos, converse com os alunos no sentido de combinarem procedimentos e atribuírem responsabilidades. Há alunos que, por vezes, não dão a devida atenção aos erros e não os compreendem. Deve, por isso, haver um acompanhamento regular por parte do professor.

4.2 LATEX, SAGE MATHEMATICS E PYTHON

Para criar os recursos digitais foi usado o Latex para escrever os textos, o *software* matemático Sage Mathematics e a linguagem de programação Python.

O TeX é um programa criado por Donald Knuth, na década de 70, com o intuito de processar textos e fórmulas matemáticas e aumentar a qualidade de impressão utilizada. O LaTeX é uma extensão do TeX criado por Leslie Lamport, na década de 80, com a finalidade de facilitar o uso do TeX. É um programa que fornece um conjunto de comandos que utilizam o TeX como base de processamento. [47]

Como tal, o Latex é bastante utilizado para a produção de textos matemáticos e científicos e foi usado para escrever a parte correspondente aos enunciados dos exercícios.

O Sage Mathematics é um *software* gratuito e de código aberto, que "utiliza um conjunto de pacotes matemáticos pré-existentes como Maxima, GAP, Pari/GP e muitos outros, integrando-os numa interface única. Sage é construído sobre várias linguagens de programação, como C, C++, Fortran, mas, principalmente Python" [48]

Este *software* foi desenvolvido por uma comunidade de programadores e matemáticos como alternativa viável aos principais softwares matemáticos que necessitam de licença para serem utilizados tais como o Mathematica, o Matlab, o Magma e o Maple. [49]

Através do *software* Sage Mathematics, um professor pode criar e gerar diversos exercícios parametrizados o que evita a construção sistemática do mesmo tipo para um determinado conteúdo. Para escrever o código para a construção desses exercícios além de se utilizar o próprio Sage utiliza-se a linguagem de programação Python.

Python é uma linguagem de programação livre e de código aberto, criada pelo matemático Van Rossum e desenvolvida atualmente por uma vasta comunidade de colaboradores. [50]

4.3 MEGUA

MEGUA (Mathematics Exercise Generator, Universidade de Aveiro) [51] é uma biblioteca de *software* livre e de código aberto que permite a criação de base de dados de exercícios parametrizados com as respetivas resoluções. Permite criar e guardar os exercícios numa das base de dados e exportá-los em formato pdf e em formato HTML. [52]

Cada *worksheet* criada no MEGUA contém um exercício parametrizado, que é composto da seguinte forma:

- na primeira célula é aberta a base de dados onde o exercício ficará alojado.

  ```
  from megua.all import*
  meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")
  ```

  onde `mp2013web.sqlite` é, neste caso, a designação da base de dados que contém os exercícios criados nesta dissertação;
- numa das células seguintes começa-se por construir o exercício com texto em LaTeX (sumário, texto do enunciado e texto da resposta) e a geração de valores em Python/Sagemath (respetiva programação do exercício parametrizado em Python).

Este *software* permite criar diverso material didático, nomeadamente diferentes exercícios sobre o mesmo tópico. De notar que qualquer utilizador do MEGUA, por exemplo um professor, após construir o exercício pode ver imediatamente o resultado e imprimi-lo para dar aos seus alunos ou simplesmente inseri-lo num trabalho ou num teste; pode mais tarde voltar ao exercício e modificá-lo, por exemplo para acrescentar novas valências; e pode, a qualquer momento, partilhá-lo com outros utilizadores.

4.4 SIACUA

Nas palavras de Rui Costa [53] "Um dos grandes desafios que muitos professores enfrentam é o de possibilitar aos alunos o conhecimento imediato sobre a qualidade do seu trabalho. As novas tecnologias parecem ser um instrumento de bastante relevo para se conseguir ultrapassar essa dificuldade."

Neste sentido, com a finalidade de dar mais apoio aos alunos, apareceu o projeto SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador, Universidade de Aveiro), "uma plataforma de exercícios de várias unidades curriculares da área da Matemática, que inclui um sistema autónomo de aprendizagem interativo." [54]

Esta plataforma [55] dispõe de um índice com informações e exercícios sobre o assunto e de uma área de estudo autónomo onde o aluno tem acesso à sua evolução através de barras de progresso que aumentam ou diminuem consoante demonstrem ou não conhecimento sobre o tópico que estão a responder. A área de estudo autónomo contém questões do tipo verdadeiro/falso do PmatE (Projecto Matemática Ensino) e questões de escolha múltipla do projeto MEGUA.

Os recursos digitais elaborados no âmbito deste trabalho, estão disponíveis na plataforma SIACUA no separador "Matemática-Básico", uma vez que se dirigem ao nível do Ensino Básico. Na secção do estudo autónomo correspondente, os alunos têm possibilidade de responder às questões de escolha múltipla e obter um *feedback* imediato com a informação se acertaram ou não, acompanhado da resolução detalhada do exercício caso errem ou simplesmente não respondam.

4.5 CONSTRUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

Para fazer os exercícios teve-se em conta o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas* lecionado aos alunos no 8º ano de escolaridade, assim como as dificuldades e os erros dos alunos sobre o tema abordados no capítulo 3.

Este estudo principia-se pela análise de um exercício simples. Para criar os seguintes considerou-se pelo menos um dos seguintes fatores:

- aumento do grau de dificuldade do exercício;
- alteração das condições iniciais e o número de parâmetros envolvidos;
- modificação dos distratores.

Vejamos então o processo que envolveu a construção dos diversos recursos digitais.

Sistemas do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$

O **exercício 1** é um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$ onde a, c, d e f são números inteiros não nulos e a é diferente de 1.

Reparemos na restrição dos parâmetros a e d. Estes são não nulos uma vez que se pretende que o sistema seja possível e determinado e a é diferente de 1 por conveniência, para que o sistema não seja tão simples ao ponto de não ser necessário fazer qualquer cálculo para encontrar a sua solução.

De seguida, encontra-se uma figura que mostra a definição dos parâmetros para este exercício tal como foi feito no MEGUA.

```
class E97H30_Sistema2Eqs_001(Exercise):

    (1)   def make_random(s):
    (2)      x=var('x')
    (2)      y=var('y')

          #defining the parameters of the system
    (3)      s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
    (3)      s.c1=ur.iunif_nonset(-6,6,[0])
    (3)      s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    (3)      s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
```

Figura 4.5: Definição de parâmetros do enunciado

A instrução (1) inicia a definição dos parâmetros que ocorrem no enunciado do exercício.

Em (2) definem-se as variáveis. Neste caso, as variáveis escolhidas são o x e o y .

Por sua vez, em (3) definem-se os valores que cada parâmetro pode tomar. Neste caso, `s.a1`, `s.c1`, `s.d1` e `s.f1` correspondem aos valores dos parâmetros `a1`, `c1`, `d1` e `f1`, respetivamente. Foram escolhidos números inteiros entre -9 e 9 e entre -6 e 6. Não se alargaram estes intervalos simplesmente para que os exercícios não envolvessem demasiados cálculos, uma vez que não é esse o propósito do exercício. No entanto, tiveram que ser feitas algumas restrições a estes parâmetros pelos motivos já em cima mencionados, logo os valores que não podem assumir encontram-se entre os parênteses retos.

Os valores dos parâmetros permitem criar, de forma aleatória, um número significativo de sistemas do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$ para cada questão gerada.

Para continuar a elaborar e estruturar este exercício foram necessários vários passos, tendo sido um deles a `criação das quatro opções de escolha múltipla` : a alternativa correta e três alternativas erradas escolhidas atendendo aos erros que os alunos cometem ao resolver este tipo de sistema.

1. A solução do sistema $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$ é o par ordenado $(x, y) = \left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{f}{d}\right)$. Logo, $\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{f}{d}\right)$ é a resposta correta a apresentar nas opções de escolha múltipla.

2. Há alunos que trocam a posição de x e y ao apresentarem a solução do sistema. Deste modo, a escolha da primeira opção errada para solução do sistema é o par ordenado $\left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{c}{a}\right)$.

3. Outro erro bastante comum cometido pelos alunos é fazerem, erradamente, $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{-a}$. Assim, a segunda opção de resposta errada é o par ordenado $\left(\dfrac{c}{-a}, \dfrac{f}{-d}\right)$.

4. Mais um erro comum dos alunos é perante uma equação do tipo $ax = c$ pensarem que é equivalente a $x = c - a$. Perante este erro, a terceira opção errada é o par ordenado $(c - a, f - d)$.

Posto isto, para as opções de escolha múltipla definimos na programação os seguintes parâmetros:

```
#Correct answer:  (s.cor11, s.cor12)
      s.cor11=s.c1/s.a1
      s.cor12=s.f1/s.d1

#1 wrong answer:  (s.err11, s.err12)
      s.err11=s.cor12
      s.err12=s.cor11

#2 wrong answer:  (s.err21, s.err22)
      s.err21=-s.cor11
      s.err22=-s.cor12

#3 wrong answer:  (s.err31, s.err32)
      s.err31=s.c1-s.a1
      s.err32=s.f1-s.d1
```

Figura 4.6: Parâmetros usados para as quatro opções de escolha múltipla

Para cada concretização das variáveis as quatro opções de escolha múltipla devem ser distintas. Portanto, é preciso `garantir que não aparecem opções de escolhas múltiplas iguais`, isto é:

1. $\left(\frac{c}{a}, \frac{f}{d}\right) \neq \left(\frac{f}{d}, \frac{c}{a}\right)$

2. $\left(\frac{c}{a}, \frac{f}{d}\right) \neq \left(\frac{c}{-a}, \frac{f}{-d}\right)$

3. $\left(\frac{c}{a}, \frac{f}{d}\right) \neq (c-a, f-d)$

4. $\left(\frac{f}{d}, \frac{c}{a}\right) \neq \left(\frac{c}{-a}, \frac{f}{-d}\right)$

5. $\left(\frac{f}{d}, \frac{c}{a}\right) \neq (c-a, f-d)$

6. $\left(\frac{c}{-a}, \frac{f}{-d}\right) \neq (c-a, f-d)$

De acordo com a seguinte definição:

Definição 4.1 *Dois pares ordenados* (u, v) *e* (q, r) *são iguais se e só se* $u = q$ *e* $v = r$.

Conclui-se, portanto, que para os pares ordenados não serem iguais basta garantir que $u \neq q$ ou $v \neq r$.

De salientar que nas condições iniciais já se tinha definido que a, c, d e f eram números inteiros diferentes de zero.

Posto isto, da análise de **1.** é necessário garantir ainda que $af \neq cd$.

De seguida, para **2.** $c \neq 0$, $a \neq 0$; para **3.** $c - ac \neq -a^2$, para **4.** $fa \neq -cd$; para **5.** $f \neq cd - ad$ e para **6.** $c \neq -ca + a^2$. Não esquecendo as condições iniciais já mencionadas.

As condições $c \neq 0$, $a \neq 0$ já estão definidas na própria seleção dos parâmetros (ver figura 4.5).

Para as restantes condições foi utilizada a ferramenta *itertools* do Sage Math. Através desta ferramenta é possível gerar-se "uma lista com todos os casos possíveis até certos limites que pode ser concretizada numa célula nova do worksheet do exercício em desenvolvimento". [46] Assim, foi usada a ferramenta *itertools* para determinar os n-uplos que verificavam as determinadas condições (ver exemplo da figura 4.7).

Recorrendo a esta ferramenta, gerou-se uma lista de 1672 casos que satisfazem a condição $af = cd$ sendo $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$.

Perante isto, foi necessário impor uma nova condição para garantir que as opções de escolha múltipla nunca eram iguais e verificamos que caso a condição $af = cd$ fosse satisfeita tomando $a = 11$ isto já não acontecia. Utilizando, novamente, a ferramenta *itertools* confirma-se que esta é a solução para ultrapassar o obstáculo encontrado.

```
from itertools import ifilter,product

def good_tuple(a,c,d,f):
    c1=a*f==c*d
    c2=a<>0
    c3=c<>0
    c4=d<>0
    c5=f<>0

    return c1 and c2 and c3 and c4 and c5
it_casos = ifilter( lambda args: good_tuple(*args), product( xrange(-9,10),
xrange(-9,10), xrange(-9,10), xrange(-9,10) ) )
casos = [ t for t in it_casos ]; casos
```

Figura 4.7: Utilização da ferramenta itertools para testar a condição $af = cd$

Após testar cada uma das outras condições recorrendo à ferramenta *itertools*, impusemos a mesma restrição para cada uma delas: caso uma das condições $c - ac = -a^2$, $fa = -cd$, $f = cd - ad$ e $c = -ca + a^2$ fosse satisfeita impunha-se que $a = 11$.

Face a tudo o exposto anteriormente, para garantir que as opções de escolha múltipla não se repetiriam, definiram-se mais parâmetros para a elaboração do enunciado deste exercício e foi imposta a condição (1), como se vê na figura 4.8.

```
#testar condições
          s.af1=s.a1*s.f1
          s.cd1=s.c1*s.d1
          s.ca1=s.c1-s.a1*s.c1
          s.aa1=-s.a1*s.a1
          s.aa2=-s.aa1
          s.cd2=-s.cd1
          s.cdf1=s.f1-s.c1*s.d1
          s.ad1=-s.a1*s.d1
          s.ca2=s.c1+s.c1*s.a1
       (1)   if s.af1==s.cd1
             or s.ca1==s.aa1 or s.af1==s.cd2
             or s.cdf1==s.ad1 or s.ca2==s.aa2:   s.a1=11
```

Figura 4.8: Definição de parâmetros auxiliares

Continuando a estruturação do exercício, é necessário `definir o tipo de sistema` que constará no exercício, tal como se vê na figura 4.9.

```
#defining the Systems of equations
      s.mem11=s.a1*x
      s.mem12=s.c1
      s.mem21=s.d1*y
      s.mem22=s.f1
```

Figura 4.9: Definição do sistema do 1º grau com duas incógnitas

Repare-se que neste exercício $mem11$ representa o primeiro membro da primeira equação do sistema e $mem12$ o segundo membro. Por sua vez, $mem21$ o primeiro membro da segunda equação e $mem22$ o segundo membro, de acordo com o tipo de sistema estabelecido inicialmente

$$\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$$

.

Cada exercício gera automaticamente e aleatoriamente pelo computador inúmeros enunciados com as respetivas resoluções, tendo em conta os parâmetros definidos. De seguida, encontra-se uma concretização deste exercício (exemplo 4.1) onde os valores dos parâmetros gerados são: $a = 2$, $c = 1$, $d = -5$ e $f = -5$.

Exemplo 4.1 *Considera o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} 2\,x = 1 \\ \\ -5\,y = -5 \end{cases}$$

Resolvendo-o analiticamente, indica o par ordenado que corresponde à solução do sistema.

Escolha Múltipla:

- $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
- $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
- $(-1, 0)$

Proposta de resolução:

Pretende-se que a primeira equação seja resolvida em ordem a x e a segunda em ordem a y. Resolvendo, obtém-se que:

$$\begin{cases} 2\,x = 1 \\ \\ -5\,y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = 1 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Note-se que antes do tópico *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas* os alunos estudam o tópico *Equações literais.*

A finalidade de resolver uma equação literal em ordem a uma incógnita é isolar essa incógnita e estabelecer o seu valor. Deste modo, a objetividade destas equações está ligada à resolução de sistemas lineares com duas incógnitas pelo método da substituição, pois pretende-se isolar uma das variáveis de uma das equações e substituir o valor na outra equação.

Na resolução de sistemas pretende-se que os alunos neste nível de escolaridade (8º ano) tenham presente estes pré-requisitos e resolvam o sistema aplicando intuitivamente os princípios de equivalência da adição e da multiplicação, ou seja, apliquem as regras práticas da resolução de equações.

É importante salientar que no início do exercício 1 no sistema $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$ tinha sido definido que a e d eram simultaneamente não nulos para que o sistema seja possível e determinado.

Para generalizar o estudo de sistemas ao caso geral, recorremos à sua forma matricial. Impondo restrições ao determinante da matriz dos coeficientes e aos termos independentes podem ser gerados sistemas possíveis e determinados, sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis.

Explicitam-se de seguida alguns conceitos matemáticos para esclarecer o acima mencionado, de acordo com alguns documentos [56], [57], [58] e [59].

Consideremos o sistema de duas equações lineares com duas incógnitas do tipo

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais.

Este sistema pode ser escrito na *forma matricial*: $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

onde A designa a *matriz dos coeficientes*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

X é a *matriz das incógnitas*

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e B é a *matriz dos termos independentes*

$$B = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

O *determinante* da matriz S do sistema é dado por

$$det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$$

ou seja, é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

O sistema só é possível e determinado se este determinante for não nulo. Nesse caso estamos em condições de aplicar a regra de Cramer.

A *regra de Cramer* é um método que utiliza determinantes para a resolução de sistemas com o número de equações igual ao número de incógnitas. Enumera-se de seguida cada um dos passos para aplicação desta regra:

1º passo - Calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

$$det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$$

2º passo - Calcular o determinante S_x da matriz que se obtém substituindo a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes na matriz dos coeficientes do sistema.

$$S_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$$

3º passo - Calcular o determinante S_y da matriz que se obtém substituindo a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes na matriz dos coeficientes do sistema.

$$S_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc$$

4º passo - Calcular o valor de cada uma das incógnitas que são dados por:

$$x = \frac{S_x}{det(S)} \text{ e } y = \frac{S_y}{det(S)}$$

para apresentar a solução do sistema.

Posto isto, vejamos a *classificação do sistema* linear de acordo com os determinantes da matriz do sistema:

- Se $det(S) \neq 0$, ou seja, se $ae - db \neq 0$ o sistema é `Possível e Determinado`.
- Se $det(S) = 0$ o sistema é `Possível e Indeterminado` ou o sistema é `Impossível`.
  - Se $det(S) = S_x = S_y = 0$ o sistema é `Possível e indeterminado`.
  - Se $det(S) = 0$ e um dos determinantes S_x ou S_y for não nulo o sistema é `Impossível`.

Retomando o exercício 1, aplicando a regra de Cramer a um sistema do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$, obtém-se que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$$

$$A_x = \begin{vmatrix} c & 0 \\ f & d \end{vmatrix} = cd$$

$$A_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & f \end{vmatrix} = af$$

Já tinha sido definido que este sistema era possível e determinado então tem-se que:

$$x = \frac{A_x}{det(A)} = \frac{cd}{ad} \text{ e } y = \frac{A_y}{det(A)} = \frac{af}{ad}$$

Salienta-se, assim, que para este tipo de sistema:

- Se $det(A) \neq 0$, ou seja, se $a \neq 0$ e $d \neq 0$ o sistema é `Possível e Determinado`.
- Se $det(A) = 0$, ou seja, se $a = 0$ ou $d = 0$ o sistema é `Possível e indeterminado` ou o sistema é impossível.

Note-se que no caso do exercício 1, a e d são números não nulos.

Relativamente ao **exercício 2** o sistema é idêntico ao anterior do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$. No entanto foram impostas condições iniciais diferentes. Definiram-se que a, c, d e f eram números inteiros e a e d diferentes de zero e um.

Destaca-se para a importância deste exercício pelo facto dos alunos, em geral, se confundirem com a existência da solução 0. Por exemplo, há alunos que quando se deparam com uma equação do tipo $2x = 0$ julgam que é uma equação impossível ou, simplesmente, param de resolver a equação porque não sabem o que devem fazer ao zero.

Sendo $a \neq 0$ e $d \neq 0$ tem-se que:

- Se $c \neq 0$ e $f \neq 0$ a solução do sistema é $\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{f}{d}\right)$.
- Se $c = 0$ e $f \neq 0$ a solução do sistema é $\left(0, \dfrac{f}{d}\right)$.
- Se $c \neq 0$ e $f = 0$ a solução do sistema é $\left(\dfrac{c}{a}, 0\right)$.
- Se $c = 0$ e $f = 0$ a solução do sistema é $(0, 0)$.

Neste exercício houve necessidade de, consoante o valor que os parâmetros assumiam, ter um único texto de resposta onde estavam aglomerados estes quatro casos (Resolução 0, 1, 2 e 3). Para tal, foi usada uma funcionalidade (ver na figura 4.10) onde, posteriormente, na parte da programação, se definiram em que situações apareceriam cada um destes casos. (figura 4.11).

```
<showone res1>
 <thisone>
     Resolução 0
 </thisone>
 <thisone>
     Resolução 1
</thisone>
<thisone>
     Resolução 2
</thisone>
<thisone>
     Resolução 3
 </thisone>
</showone>
```

Figura 4.10: Instruções para aglomerar vários casos num único texto

De seguida, encontra-se uma concretização deste exercício (exemplo 4.2), onde os valores dos parâmetros gerados são: $a = 2$, $c = 0$, $d = -5$ e $f = -5$.

Exemplo 4.2 *Considera o sistema:*

$$\begin{cases} 2\,x = 0 \\ \\ -5\,y = -5 \end{cases}$$

```
#Resolucao
          if s.c1==0:
              if s.f1==0:
                  s.res1=3
              else:
                  s.res1=1
          else:
              if s.f1==0:
                  s.res1=2
              else:
                  s.res1=0
```

Figura 4.11: Instruções necessárias para a escolha das resoluções

Resolvendo-o analiticamente, assinala o par ordenado que corresponde à solução do sistema.

Escolha Múltipla:

- $(0, 1)$
- $(1, 0)$
- $(0, -1)$
- $(-2, 0)$

Proposta de resolução:

A solução da primeira equação é $x = 0$. Resolvendo a segunda equação em ordem a y:

$$\begin{cases} 2\,x = 0 \\ \\ -5\,y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 1 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x, y) = (0, 1)$$

No **exercício 3**, sendo o mesmo tipo de sistema, a, c, d e f podem ser zero. Logo, o principal objetivo deste exercício é avaliar se os alunos sabem classificar um sistema.

Note-se que para classificar um sistema do tipo $\begin{cases} ax = c \\ dy = f \end{cases}$, onde a, c, d, f são números reais tem-se que:

- Se $a = 0$, $c = 0$, $d = 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e indeterminado.
- Se $a = 0$, $c = 0$, $d = 0$ e $f \neq 0$, o sistema é impossível.
- Se $a = 0$, $c = 0$, $d \neq 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e indeterminado.
- Se $a = 0$, $c = 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado.
- Se $a = 0$, $c \neq 0$, $d = 0$ e $f = 0$, o sistema é impossível.
- Se $a = 0$, $c \neq 0$, $d = 0$ e $f \neq 0$, o sistema é impossível.
- Se $a = 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $f = 0$, o sistema é impossível.
- Se $a = 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$, o sistema é impossível.
- Se $a \neq 0$, $c = 0$, $d = 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e indeterminado.
- Se $a \neq 0$, $c = 0$, $d = 0$ e $f \neq 0$, o sistema é impossível.
- Se $a \neq 0$, $c = 0$, $d \neq 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e determinado e a solução do sistema é o par ordenado $(0, 0)$.
- Se $a \neq 0$, $c = 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução do sistema é o par ordenado $\left(0, \dfrac{f}{d}\right)$.
- Se $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d = 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e indeterminado.
- Se $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d = 0$ e $f \neq 0$, o sistema é impossível.
- Se $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $f = 0$, o sistema é possível e determinado e a solução do sistema é o par ordenado $\left(\dfrac{c}{a}, 0\right)$.
- Se $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução do sistema é o par ordenado $\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{f}{d}\right)$.

Em suma,

- Se $a \neq 0$ e $d \neq 0$ o sistema é possível e determinado. O determinante deste sistema é diferente de zero.
- Se $a = 0$ ou $d = 0$ o sistema é possível e indeterminado ou o sistema é impossível. O determinante é zero.

Vejamos então três concretizações possíveis deste exercício, onde no primeiro exemplo (exemplo 4.3) os valores dos parâmetros são $a = 0$, $c = 1$, $d = -7$ e $f = -6$ que se traduz num sistema impossível, no segundo exemplo (exemplo 4.4) $a = -6$, $c = 0$, $d = 2$ e $f = -5$ o sistema é possível e determinado e no terceiro exemplo (exemplo 4.5) $a = 0$, $c = 0$, $d = 6$ e $f = 12$ o sistema é possível e indeterminado.

Exemplo 4.3 *Considera o sistema*

$$\begin{cases} 0x = 1 \\ \\ -7y = -6 \end{cases}$$

Indica qual é a afirmação verdadeira.

Escolha múltipla:

- *O sistema de equações é impossível.*
- *O conjunto solução do sistema de equações é* $\mathbb{R}^2$.
- *Qualquer par ordenado de números reais,* (x, y), *é solução do sistema de equações.*
- *A solução do sistema é* $(0, 0)$.

Proposta de resolução:

A equação $0x = 1$ *é uma equação impossível pois* $0 = 1$ *é uma proposição falsa. Assim, o sistema de equação não tem solução, isto é, o seu conjunto solução é o conjunto vazio e o sistema diz-se impossível.*

Exemplo 4.4 *Considera o sistema*

$$\begin{cases} -6x = 0 \\ \\ 2y = -5 \end{cases}$$

Indica qual é a afirmação verdadeira.

Escolha múltipla:

- *O sistema é possível e determinado.*
- *O conjunto solução do sistema é* $\mathbb{R}^2$.
- *O conjunto solução do sistema é* $\left\{\left(x, -\dfrac{5}{2}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$.
- *O sistema de equações tem uma infinidade de soluções.*

Proposta de resolução:

O conjunto solução da equação $-6\,x = 0$ *é* $\{0\}$. *A equação é possível e determinada.*

O conjunto solução da segunda equação $2\,y = -5$ *é* $\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$. *Logo, é uma equação possível e determinada.*

Assim, o sistema de equações é um sistema possível e determinado e a sua solução é $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $\left\{\left(0, -\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Exemplo 4.5 *Considera o sistema*

$$\begin{cases} 0x = 0 \\ \\ 6y = 12 \end{cases}$$

Indica qual é a afirmação verdadeira.

Escolha múltipla:

- *O conjunto solução do sistema é* $\{(x, 2) : x \in \mathbb{R}\}$.
- *O sistema é possível e determinado.*
- *O conjunto solução do sistema de equações é* $\emptyset$.
- *O conjunto solução é* $\{(0, 2)\}$.

Proposta de resolução:

A equação $0x = 0$ *é uma equação possível mas indeterminada já que qualquer valor de* x *real satisfaz a igualdade.*

Quanto à segunda equação, $6\,y = 12$ *é equivalente a* $y = 2$. *A equação é possível e determinada e o seu conjunto solução é* $\{2\}$.

Neste caso, o sistema é possível e indeterminado e as soluções são da forma $(x, 2)$, *onde* x *é um qualquer número real.*

Portanto, o conjunto solução é $\{(x, 2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas do tipo $\begin{cases} ax + by = c \\ dx = f \end{cases}$

Note-se que o grau de dificuldade dos sistemas vai aumentando. Começamos com o sistema de duas equações em que cada equação só continha uma variável, depois passamos para os casos de uma equação apenas com uma variável e a outra já com duas variáveis até chegarmos ao caso mais geral de duas equações em que as incógnitas x e y figuram em ambas as equações.

Note-se ainda que para este tipo de sistema escolhemos dois casos (exercícios 4 e 5), um em que a equação tinha a variável x e outro com a variável y.

O **exercício 4** é um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas do tipo $\begin{cases} ax + by = c \\ dx = f \end{cases}$ onde a, b, c , d e f são números inteiros , a, b, c e d são não nulos e $d \neq 1$.

Salienta-se já a restrição aos parâmetros a, b, d, diferentes de zero, para garantirmos o tipo de sistema que se pretendia tratar. De salientar que também se pretendia que este sistema fosse possível e determinado, daí que se imponha a condição do determinante da matriz dos coeficientes ser não nulo o que equivale a impor as condições d e b diferentes de zero. Relativamente ao $d \neq 1$ é por conveniência, para que o sistema não seja tão simples.

De seguida, apresentam-se as `quatro opções de escolha múltipla` utilizadas neste exercício.

1. A solução do sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx = f \end{cases}$ é o par ordenado $(x, y) = \left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{cd - af}{bd}\right)$. Logo, $\left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{cd - af}{bd}\right)$ é a resposta correta.
2. Um erro que alguns alunos podem cometer é na resolução da equação $dx = f$. Podem julgar que é, erradamente, equivalente a $x = \dfrac{d}{f}$. Daqui resulta que $y = \dfrac{cf - ad}{fb}$. Posto isto, a primeira opção errada escolhida para a escolha múltipla é o par ordenado $\left(\dfrac{d}{f}, \dfrac{cf - ad}{fb}\right)$.
3. A segunda opção errada de resposta é o par ordenado $\left(\dfrac{cd - af}{bd}, \dfrac{f}{d}\right)$, porque muitas vezes os alunos na solução do sistema não apresentam o par ordenado da forma correta.
4. Outro erro que pode ser cometido pelos alunos na resolução da equação $dx = f$ é não aplicarem corretamente o princípio da multiplicação e colocam que $x = f - d$. Resolvendo o resto do sistema obtêm que $y = \dfrac{c - af + ad}{b}$. Deste modo, resulta a última alternativa errada para a escolha múltipla que é o par ordenado $\left(f - d, \dfrac{c - af + ad}{b}\right)$.

Perante a escolha das opções de escolha múltipla para este exercício foi necessário `garantir escolhas múltiplas diferentes`, ou seja:

1. $\left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{cd - af}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{d}{f}, \dfrac{cf - ad}{fb}\right)$
2. $\left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{cd - af}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{cd - af}{bd}, \dfrac{f}{d}\right)$
3. $\left(\dfrac{f}{d}, \dfrac{cd - af}{bd}\right) \neq \left(f - d, \dfrac{c - af + ad}{b}\right)$
4. $\left(\dfrac{d}{f}, \dfrac{cf - ad}{fb}\right) \neq \left(\dfrac{cd - af}{bd}, \dfrac{f}{d}\right)$
5. $\left(\dfrac{d}{f}, \dfrac{cf - ad}{fb}\right) \neq \left(f - d, \dfrac{c - af + ad}{b}\right)$
6. $\left(\dfrac{cd - af}{bd}, \dfrac{f}{d}\right) \neq \left(f - d, \dfrac{c - af + ad}{b}\right)$

De salientar que na análise destas condições teve-se em conta, novamente, a definição 4.1 bem como as condições iniciais já estabelecidas. Assim, resulta que:

1. $f^2 \neq d^2$
2. $fa + fb \neq cd$
3. $-f \neq -fd + d^2$
4. $bd^2 \neq cdf - af^2$
5. $-d \neq -f^2 + fd$
6. $cd - af \neq fbd - bd^2$

Além disto, recorde-se que já tinha sido definido nas condições iniciais que a, b, c e d eram números não nulos e $d \neq 1$. No entanto, é necessário também garantir que $f \neq 0$ para ser possível existir, por exemplo, o par ordenado $\left(\dfrac{d}{f}, \dfrac{cf - ad}{fb}\right)$, pois o denominador não pode ser zero.

Tal como no exercício 1 recorreu-se à ferramenta *itertools* do Sage Math para resolver as situações de **1.** a **6.**. Conclui-se que se uma das igualdades ocorresse fazendo $d = 11$ já não ocorreria a igualdade.

Face a tudo o exposto anteriormente, para garantir que as opções de escolha múltipla nunca se repetiriam, definiram-se os parâmetros iniciais e os auxiliares (Figura 4.12) .

Seguiu-se a definição dos parâmetros usados para as opções de escolha múltipla (Figura 4.13) que constam na parte da resposta ao exercício.

De seguida, encontra-se uma concretização deste exercício (exemplo 4.6) onde os valores dos parâmetros gerados são $a = -8$, $b = 1$, $c = -4$, $d = -8$ e $f = -4$:

Exemplo 4.6 *Considera o sistema:*

$$\begin{cases} -8\,x + y = -4 \\ \\ -8\,x = -4 \end{cases}$$

Resolvendo analiticamente, indica a solução do sistema.

Escolha Múltipla:

- $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$
- $(2, 12)$
- $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$
- $(4, 28)$

```
#defining the parameters of the system
           s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.c1=ur.iunif_nonset(-6,6,[0])
           s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1]
           s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

        s.abf1=s.f1*s.a1+s.f1*s.b1
        s.cd1=s.c1*s.d1
        s.af1=-s.f1*s.d1+s.d1^2
        s.cd2=-s.f1
        s.acdf1=s.b1*s.d1^2
        s.acdf2=s.c1*s.d1*s.f1-s.a1*s.f1^2
        s.cdaf11=-s.f1^2+s.d1*s.f1
        s.fbdbd11=-s.d1
        s.aaanovo1=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1
        s.aaanovo2=s.f1*s.b1*s.d1-s.b1*s.d1^2
        s.teste11=s.f1^2
        s.teste22=s.d1^2
        if s.abf1==s.cd1 or s.af1==s.cd2 or s.acdf1==s.acdf2
        or s.cdaf11==s.fbdbd11 or s.aaanovo1==s.aaanovo2
        or s.teste11==s.teste22:    s.d1=11
```

Figura 4.12: Definição dos parâmetros do enunciado e dos parâmetros auxiliares

Proposta de resolução:

Começamos por resolver a segunda equação em ordem a x.

$$\begin{cases} -8\,x+y=-4 \\ \\ -8\,x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\,x+y=-4 \\ \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vamos agora substituir o valor de x na primeira equação e resolver essa equação em ordem a y.

$$\begin{cases} -8\times\dfrac{1}{2}+y=-4 \\ \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4=-4 \\ \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4+4 \\ \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)$$

```
#Correct answer
s.cor11=s.f1/s.d1
s.aux11=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1
s.aux12=s.b1*s.d1
s.cor12=s.aux11/s.aux12
#1 wrong answer
s.err11=1/s.cor11
s.auxe11=s.c1*s.f1-s.a1*s.d1
s.auxe12=s.f1*s.b1
s.err12=s.auxe11/s.auxe12
#2 wrong answer
s.err21=s.cor12
s.err22=s.cor11
#3 wrong answer
s.err31=s.f1-s.d1
s.auxe31=s.c1-s.a1*s.f1+s.d1*s.a1
s.auxe32=s.b1
s.err32=s.auxe31/s.auxe32
```

Figura 4.13: Parâmetros usados para as opções de escolha múltipla

O **exercício 5** é o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas $\begin{cases} ax+by=c \\ ey=f \end{cases}$ onde a, b, e são números inteiros não nulos.

De seguida, apresentam-se as `quatro opções de escolha múltipla` utilizadas neste exercício:

1. A solução do sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ ey=f \end{cases}$ é o par ordenado $(x,y)=\left(\dfrac{ce-bf}{ae},\dfrac{f}{e}\right)$. Logo, $\left(\dfrac{ce-bf}{ae},\dfrac{f}{e}\right)$ é a primeira opção de escolha múltipla.

2. A primeira opção errada é o par ordenado $\left(\dfrac{cf-be}{af},\dfrac{e}{f}\right)$. Neste caso, a equação $ey=f$ é resolvida erradamente $y=\dfrac{e}{f}$. Há alunos que identificam a necessidade de aplicar o princípio da multiplicação mas ao aplicá-lo fazem-no de forma incorreta pois trocam o numerador com o denominador.

3. Uma vez que há alunos que colocam na solução do sistema a abcissa e a ordenada incorretamente, a segunda opção de escolha múltipla errada é o par ordenado $\left(\dfrac{f}{e},\dfrac{ce-bf}{ae}\right)$.

4. Um erro bastante comum nos alunos é não saberem aplicar o princípio da adição. Por exemplo, na resolução $ax+b=c \Leftrightarrow ax=c+b$ não fazem a operação inversa da adição. Assim, baseado nisto, sabendo que $y=\dfrac{f}{e}$ ao substituir na equação

$ax + by = c$ resulta que $eax + bf = ce$ e posteriormente tem-se que $x = \dfrac{ce + bf}{ea}$.

Posto isto, a última opção errada da escolha múltipla é $\left(\dfrac{ce + bf}{ea}, \dfrac{f}{e}\right)$

De seguida, encontra-se uma concretização deste exercício (exemplo 4.7) onde os valores dos parâmetros são: $a = 3$, $b = -6$, $c = -5$, $e = -6$ e $f = 3$.

Exemplo 4.7 *Considera o sistema:*

$$\begin{cases} 3\,x - 6\,y = -5 \\ \\ -6\,y = 3 \end{cases}$$

Resolvendo analiticamente, a solução do sistema é:

Escolha Múltipla:

- $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
- $\left(-\frac{17}{3}, -2\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{3}\right)$
- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Proposta de resolução:

Começamos por resolver a segunda equação em ordem a y.

$$\begin{cases} 3\,x - 6\,y = -5 \\ \\ -6\,y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - 6\,y = -5 \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, resolve-se essa equação em ordem a x.

$$\begin{cases} 3\,x - 6 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -5 \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x + 3 = -5 \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x = -5 - 3 \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x = -8 \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x, y) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

Sistemas do tipo $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+e=f \end{cases}$

O **exercício 6** é um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas do tipo $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+e=f \end{cases}$ onde a, b, c, d, e e f são números inteiros e a, b, d e e são não nulos.

```
#defining the systems of equations
        s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*x+s.e1
        s.mem22=s.f1
```

Figura 4.14: Definição do tipo de sistema do exercício 6

De salientar que também para este tipo de sistema existem dois casos (exercícios 6 e 7), um em que a equação tem a variável x e outro com a variável y:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ d+ey=f \end{cases}$$

De seguida, apresentam-se as `quatro opções de escolha múltipla` utilizadas no exercício 6.

1. A solução do sistema é o par ordenado $\left(\dfrac{f-e}{d}, \dfrac{cd-af+ae}{bd}\right)$. Logo, este par ordenado é a primeira opção de escolha múltipla.

2. Existem alunos que, erradamente, na solução do sistema apresentam o par ordenado (y,x) em vez de (x,y). Assim, o primeiro distrator (alternativa errada) corresponde ao par ordenado $\left(\dfrac{cd-af+ae}{bd}, \dfrac{f-e}{d}\right)$.

3. O segundo distrator é o par ordenado $\left(\dfrac{f+e}{d}, \dfrac{cd-af-ae}{bd}\right)$ que resulta do erro $dx+e=f \Leftrightarrow x=\dfrac{f+e}{d}$.

4. Por fim, o terceiro distrator é o par ordenado $\left(\dfrac{-f+e}{d}, \dfrac{dc+af-ea}{bd}\right)$ que é consequência do erro $dx+e=f \Leftrightarrow x=\dfrac{f-e}{-d}$.

Posteriormente à seleção de todas as escolhas múltiplas do exercício, foi necessário `garantir escolhas múltiplas distintas`.

1. $\left(\dfrac{f-e}{d}, \dfrac{cd-af+ae}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{cd-af+ae}{bd}, \dfrac{f-e}{d}\right)$

2. $\left(\dfrac{f-e}{d}, \dfrac{cd-af+ae}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{f+e}{d}, \dfrac{cd-af-ae}{bd}\right)$

3. $\left(\dfrac{f-e}{d}, \dfrac{cd-af+ae}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{f-e}{-d}, \dfrac{dc+af-ea}{bd}\right)$

4. $\left(\dfrac{cd-af+ae}{bd}, \dfrac{f-e}{d}\right) \neq \left(\dfrac{f+e}{d}, \dfrac{cd-af-ae}{bd}\right)$

5. $\left(\dfrac{cd-af+ae}{bd}, \dfrac{f-e}{d}\right) \neq \left(\dfrac{f-e}{-d}, \dfrac{dc+af-ea}{bd}\right)$

6. $\left(\dfrac{f+e}{d}, \dfrac{cd-af-ae}{bd}\right) \neq \left(\dfrac{f-e}{-d}, \dfrac{dc+af-ea}{bd}\right)$

Façamos a análise das condições anteriores, tendo sempre presente as condições iniciais já estabelecidas e a definição 4.1.

- A condição **1.** é equivalente a $bf - eb \neq cd - af + ae$.
- Em **2.** conclui-se que $e \neq 0$.
- De **3.** basta garantir que $f \neq e$.
- Neste caso, **4.** equivale a $cd - af + ae \neq bf + be$.
- Em **5.** resulta que $cd - af + ae \neq -bf + be$.
- Em **6.** é necessário garantir que $f \neq 0$.

A condição $e \neq 0$ já se encontrava definida nos parâmetros iniciais e a condição $f \neq 0$ é fácil de impor na própria seleção de parâmetros.

No que concerne às restantes condições recorreu-se novamente à ferramenta *itertools* e concluiu-se que, caso acontecesse igualdade das condições acima referidas, isto é, se $bf - eb = cd - af + ae$, $f = e$, $cd - af + ae = bf + be$ ou $cd - af + ae = -bf + be$, impondo $f = 11$, a igualdade já não ocorria.

Deste modo, ficam definidos os parâmetros iniciais e os parâmetros auxiliares.

De seguida, encontra-se uma concretização deste exercício (exemplo 4.8) onde os valores dos parâmetros gerados são: $a = 3$, $b = -6$, $c = -5$, $e = -6$, $e = 3$ e $f = 7$.

Exemplo 4.8 *Considera o sistema:*

$$\begin{cases} 3\,x - 6\,y = -5 \\ \\ -6\,x + 3 = 7 \end{cases}$$

Resolvendo analiticamente, a solução do sistema é:

Escolha Múltipla:

- $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$
- $\left(-\frac{5}{3},0\right)$
- $\left(\frac{2}{3},\frac{7}{6}\right)$

Proposta de resolução:

Começamos por resolver a segunda equação em ordem a x.

$$\begin{cases} 3\,x-6\,y=-5 \\ \\ -6\,x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x-6\,y=-5 \\ \\ -6\,x=7-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x-6\,y=-5 \\ \\ -6\,x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x-6\,y=-5 \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vamos agora substituir o valor de x na primeira equação e resolver essa equação em ordem a y.

$$\begin{cases} 3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)-6\,y=-5 \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-6\,y=-5 \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\,y=-5+2 \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\,y=-3 \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x,y)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$$

Sistemas do tipo $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

Note-se que o grau de dificuldade dos exercícios foi aumentando e, uma vez que os exercícios são para alunos do Ensino Básico, chegou-se ao caso mais geral de duas equações em que as incógnitas x e y figuram em ambas as equações.

Assim, o **exercício 8** é um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas do tipo $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ onde a, b, c, d, e e f são números inteiros não nulos.

Tal como foi explicitado no estudo do exercício 1, para que o sistema seja possível e determinado o determinante da matriz dos coeficientes do sistema tem de ser não nulo, ou seja, $ae - db \neq 0$.

De seguida, apresentam-se as quatros opções de escolha múltipla utilizadas neste exercício:

1. Resolvendo o sistema conclui-se que a sua solução corresponde ao par ordenado $\left(\dfrac{ce-bf}{ea-bd}, \dfrac{fa-dc}{ea-db}\right)$. Logo, esta é a primeira opção de escolha múltipla.
2. Na solução os alunos podem trocar as posições de x e y. Esta situação é muito recorrente. Desta forma, a segunda opção de escolha múltipla é: $\left(\dfrac{fa-dc}{ea-db}, \dfrac{ce-bf}{ea-bd}\right)$.
3. A terceira opção de escolha múltipla é o par ordenado $\left(\dfrac{ce-bf-ae}{e-db}, \dfrac{f-dc+da}{e-db}\right)$ que resulta de um erro na resolução da primeira equação do sistema em ordem a x: $ax + by = c \Leftrightarrow x = -by + c - a$.
4. Por fim, a última opção de escolha múltipla é o par ordenado $\left(-bf + dbc - dba + be - db^2 + c - a, f - dc + da - e + db\right)$ que resulta do erro anterior na resolução da primeira equação e fazendo o mesmo na outra equação.

Posteriormente à seleção de todas as escolhas múltiplas do exercício, foi necessário `garantir que as escolhas múltiplas eram distintas`.

1. $\left(\dfrac{ce-bf}{ea-bd}, \dfrac{fa-dc}{ea-db}\right) \neq \left(\dfrac{fa-dc}{ea-db}, \dfrac{ce-bf}{ea-bd}\right)$
2. $\left(\dfrac{ce-bf}{ea-bd}, \dfrac{fa-dc}{ea-db}\right) \neq \left(\dfrac{ce-bf-ae}{e-db}, \dfrac{f-dc+da}{e-db}\right)$
3. $\left(\dfrac{ce-bf}{ea-bd}, \dfrac{fa-dc}{ea-db}\right) \neq \left(-bf + dbc - dba + be - db^2 + c - a, f - dc + da - e + db\right)$
4. $\left(\dfrac{fa-dc}{ea-db}, \dfrac{ce-bf}{ea-bd}\right) \neq \left(\dfrac{ce-bf-ae}{e-db}, \dfrac{f-dc+da}{e-db}\right)$
5. $\left(\dfrac{fa-dc}{ea-db}, \dfrac{ce-bf}{ea-db}\right) \neq \left(-bf + dbc - dba + be - db^2 + c - a, f - dc + da - e + db\right)$
6. $\left(\dfrac{ce-bf-ae}{e-db}, \dfrac{f-dc+da}{e-db}\right) \neq \left(-bf + dbc - dba + be - db^2 + c - a, f - dc + da - e + db\right)$

Note-se que para a análise destas condições tem-se sempre em conta a definição 4.1. e que todos os coeficientes dos termos que compõem este sistema são não nulos.

Além disto, não se pode esquecer de garantir que $ea - db \neq 0$ e $e - db \neq 0$, ou seja, $ea \neq db$ e $e \neq db$.

Neste exercício a ferramenta *itertools* foi essencial. Após testar cada uma das condições que resultam das acima discriminadas, chega-se à conclusão que se uma das igualdades ocorresse fazendo $d = 11$ já não ocorreria a igualdade e tudo ficava resolvido.

Vejamos uma concretização deste exercício (exemplo 4.9) onde os valores dos parâmetros gerados são: $a = 5$, $b = 6$, $c = -1$, $d = 6$, $e = -7$ e $f = -2$.

Exemplo 4.9 *Resolve analiticamente o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} -5\,x+6\,y=-1 \\ \\ 6\,x-7\,y=-2 \end{cases}$$

Qual é o par ordenado que corresponde à solução do sistema?

Escolha Múltipla:

- $(-19,-16)$
- $(-16,-19)$
- $\left(\dfrac{16}{43},\dfrac{26}{43}\right)$
- $(-98,17)$

Proposta de resolução:

Começamos por resolver a primeira equação em ordem a x.

$$\begin{cases} -5\,x+6\,y=-1 \\ \\ 6\,x-7\,y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=-1-6\,y \\ \\ 6\,x-7\,y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ 6\,x-7\,y=-2 \end{cases}$$

Vamos agora substituir o valor de x na segunda equação e resolver essa equação em ordem a y.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ 6\times\dfrac{1+6\,y}{5}-7\,y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ \dfrac{6+36\,y}{5}-7\,y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ 6+36\,y-35\,y=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ 36\,y-35\,y=-10-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+6\,y}{5} \\ \\ y=-16 \end{cases}$$

Agora substitui-se o valor numérico de y na primeira equação e determina-se o valor de x.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+6\times(-16)}{5} \\ \\ y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-96}{5} \\ \\ y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-95}{5} \\ \\ y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-19 \\ \\ y=-16 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x,y)=(-19,-16)$$

Além do tipo de sistemas já aqui abordados, foram ainda explorados sistemas lineares do tipo:

$$\begin{cases} g(ax+by)=c \\ dx=f \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(ax+by)=c \\ ey=f \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(ax+by)=c \\ dx+e=f \end{cases}$$

Em relação a estes exercícios, a estrutura dos exercícios é idêntica à dos anteriores, tendo sempre a preocupação de pelo menos alterar o grau de dificuldade do exercício, condições iniciais ou distratores. De salientar, novamente, que este tipo de exercício é para alunos do Ensino Básico e que os distratores escolhidos foram de acordo com as dificuldades e os erros dos alunos sobre o tema abordados no capítulo 3.

Além destes exercícios também foi construído um problema sobre sistemas.

Vejamos uma concretização desse problema (exemplo 4.11):

Exemplo 4.10 *Um ramo de flores com* 10 *estrelícias e* 6 *tulipas custou* 32.56 €*. Sabendo que cada tulipa custa mais* 0.68 € *do que cada estrelícia, determina o preço de cada flor.*

Escolha Múltipla:

- *Cada estrelícia custa* 1.78 € *e cada tulipa custa* 2.46 €*.*
- *Cada tulipa custa* 1.78 € *e cada estrelícia custa* 2.46 €*.*
- *Cada tulipa custa* 3.14 € *e cada estrelícia custa* 1.78 €*.*
- *Cada estrelícia custa* 2.46 € *e cada tulipa custa* 2.46 €*.*

Proposta de resolução:

Seja x o preço de cada estrelícia e seja y o preço de cada tulipa. Traduzindo o enunciado através de um sistema de duas equações, obtém-se:

$$\begin{cases} 10\,x+6\,y=32.56 \\ \\ y=x+0.68 \end{cases}$$

A segunda equação já está resolvida em ordem a y. Portanto, vamos substituir o valor de y na primeira equação e resolver essa equação em ordem a x.

$$\begin{cases} 10x + 6 \times (x + 0.68) = 32.56 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6x + 4.08 = 32.56 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\,x + 4.08 = 32.56 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\,x = 32.56 - 4.08 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\,x = 28.48 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{28.48}{16} \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1.78 \\ \\ y = x + 0.68 \end{cases}$$

Substituindo o valor numérico de x na 2ª equação obtém-se que:

$$\begin{cases} x = 1.78 \\ \\ y = 1.78 + 0.68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1.78 \\ \\ y = 2.46 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema corresponde ao par ordenado

$$(x, y) = (1.78, 2.46)$$

Assim, conclui-se que o preço de cada estrelícia é 1.78 € *e de cada tulipa é* 2.46 €.

Salienta-se que os alunos evidenciam bastantes dificuldades na resolução de problemas. Por vezes, não conseguem traduzir o problema para linguagem matemática porque estabelecem de forma incorreta as relações entre as incógnitas e no final não interpretam a solução do sistema no contexto do problema.

Por falta de tempo, não se realizaram exercícios com a interpretação geométrica dos sistemas de equações.

Encontram-se em anexo recursos digitais construídos, com sumários, textos do enunciado, textos da resposta (opções de escolha múltipla e resoluções) e as programações correspondentes.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Esta dissertação subordinada ao tema *Recursos digitais de apoio ao ensino dos Sistemas Lineares no 3º ciclo do Ensino Básico*, teve como grande objetivo a construção de recursos digitais de apoio ao conteúdo programático *Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas*, lecionado atualmente no 8º ano de escolaridade no domínio da *Álgebra*.

Como ponto de partida para a construção destes recursos educativos digitais teve-se em conta a adequação científica, a conformidade ao conteúdo programático, as dificuldades e os erros dos alunos na resolução de exercícios inerentes ao tema, a necessidade de diversificar recursos para alunos e professores, assim como a utilidade das novas tecnologias no ensino-aprendizagem.

Para este trabalho reflexivo, a autora não dispunha à partida de conhecimentos básicos facilitadores da sua concretização, nomeadamente para a construção efetiva dos recursos digitais. Foi necessário recorrer a ferramentas nunca dantes por esta trabalhadas: o *software* Sage Mathematics, a linguagem de programação Python, o processador de texto LaTeX e as plataformas MEGUA e SIACUA. Salienta-se ainda que além de não ter qualquer conhecimento sobre as tecnologias envolvidas, não tinha qualquer base de programação, tendo sido isso um dos principais entraves e dificuldades. Foi necessário frequentar formações, consultar manuais, ler artigos e ser um pouco autodidata para que com a supervisão das orientadoras, se conseguisse ultrapassar as dificuldades referidas.

Se por um lado o tema desta dissertação era extremamente interessante, no sentido de um dia se conseguir construir os próprios recursos digitais, de imensa utilidade, e apresentá-los aos alunos com o intuito de os incentivar a gostar ainda mais de Matemática; por outro lado, existia algum receio de não se conseguir ultrapassar todas as dificuldades inerentes à tarefa de construir os exercícios parametrizados, nomeadamente o domínio das ferramentas envolvidas. Foi um autêntico desafio, mas que a autora pode, agora, afirmar com toda a convicção que contribuiu para o seu enriquecimento pessoal e profissional.

Posto isto, neste trabalho, apresenta-se uma análise pormenorizada de procedimentos que levaram à construção dos exercícios parametrizados de escolha múltipla, com a respectiva resolução detalhada, que também podem servir como base para futuros exercícios.

Vive-se o tempo dos imensos recursos tecnológicos e o tempo das novas metodologias ativas. Estas duas vertentes têm de ser optimizadas e conciliadas de forma equilibrada. É um novo paradigma com o qual todos são confrontados: professores, alunos, encarregados da educação e sociedade em geral.

Nunca como hoje as escolas têm de ser promotoras do sucesso educativo. O tempo do "professor autoritário" e dos métodos tradicionais (manual e quadro) estão ultrapassados quer pelo seu arcaísmo quer pelos malefícios que provocam no ensino-aprendizagem. Face a esta concepção, os novos recursos tecnológicos, utilizados com critérios de rigor e de adequação, são um poderoso complemento na arte de ensinar e na arte de aprender.

No caso específico do ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática, com dificuldades claras e próprias para muitos alunos e onde o insucesso educativo continua alarmante, lançar mão de novas ferramentas auxiliares significa, à partida, combater a desmotivação, desinteresse e desconcentração dos alunos.

Os professores utilizando as tecnologias e este tipo de recurso digital, nomeadamente exercícios parametrizados e questões de escolha múltipla, têm mais disponibilidade para, em turmas muito heterogéneas, colmatarem dificuldades patentes nos alunos e promoverem o seu sucesso educativo de forma mais segura, uma vez que os exercícios vêm acompanhados de resoluções detalhadas e desta forma o professor pode obter mais tempo para dar atenção ao aluno. Além disto, com estes recursos na sala de aula podem ser realizados imensos exercícios sem necessidade de perder tempo a corrigi-los. Em suma, desta forma, é facultado mais tempo ao professor e de forma mais rápida e eficaz pode obter exercícios diferentes para todos os alunos, bem como auxiliar mais facilmente cada aluno nas diferentes etapas do seu trabalho.

Com esta ferramenta os alunos podem autoavaliar-se, verificando de imediato o grau de consecução das tarefas que foram propostas, pois recebem automaticamente um *feedback* após a escolha de uma das alternativas, seguido da resolução detalhada do exercício caso seja necessário consultar. Podem utilizar este material quer seja na sala de aula ou fora dela, uma vantagem tanto para o aluno como para o professor.

Ao acentuar estas potencialidades não se está a descrer os meios tradicionais utilizados no ensino-aprendizagem, pois todos os meios têm o seu contributo apontado ao sucesso educativo dos alunos. Mas, é incontornável o valor pedagógico-didático da utilização destas novas tecnologias nas dinâmicas do ensinar e do aprender.

Conclui-se com a expectativa que esta dissertação seja uma base de reflexão para complementar a base de dados dos exercícios sobre o tema *Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.* Para que os docentes possam beneficiar de todo o potencial pedagógico deste tipo de recurso digital, seria pertinente que, no futuro, se divulgasse junto destes as ferramentas que permitem a construção deste material didático. Assim, desenvolver-se-iam muitos mais recursos de diferentes conteúdos programáticos e dos diferentes níveis de escolaridade. No entanto, devido à complexidade das ferramentas tecnológicas e de toda a linguagem de programação inerente à parametrização do exercício, para que seja mais facilmente possível a construção destes recursos, sugere-se, paralelamente à divulgação, a existência de formação adequada para que os docentes interessados fiquem habilitados a utilizar, proficuamente, os já referidos recursos digitais.

Referências

[1] C. Castro, «A utilização de recursos digitais no processo de ensinar e aprender, Prática dos professores e perspetivas dos especialistas», Tese de Doutoramento, Universidade Católica Portuguesa, 2014.

[2] M. para a Sociedade da Informação. (1997). Livro verde para a sociedade da informação em portugal. M. da Ciência e da Tecnologia, ed., endereço: `http://homepage.ufp.pt/lmbg/formacao/lvfinal.pdf`.

[3] R. Pocinho e J. Gaspar, «O uso das tic e as alterações no espaço educativo», *Exedra – Revista Científica*, nº 6, ed. por E. S. de Educação de Coimbra, 2012.

[4] E. Fernandes, *Psicologia da educação escolar moderna*, Edipanta, ed. 2003.

[5] L. Caetano, «Tecnologia e educação: Quais os desafios?», *Revista Educação*, vol. 40, nº 2, U. F. de Santa Maria, ed., 2015.

[6] N. Menezes, «Motivação de alunos com e sem utilização das tic em sala de aula», Dissertação de mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique, 2012.

[7] H. Correia. (2004). Potencialidades educativas das tic no ensino básico. I. P. do Porto, ed., endereço: `http://www.dei.isep.ipp.pt/~paf/proj/Set2004/TIC%20no%20Ensino%20Basico.pdf`.

[8] M. da Educação – Departamento da Educação Básica, ed., *A Matemática na Educação Básica*, 1999.

[9] D. da Educação Básica - Ministério da Educação, ed., *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências essenciais*, 2001.

[10] M. da Educação - Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, ed., *Programa de Matemática do Ensino Básico*, 2007.

[11] D. G. de Inovação e Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação, ed., *Álgebra no Ensino Básico*, 2009.

[12] M. da Educação e Ciência, ed., *Programa e Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico*, 2013.

[13] F. Costa, «A utilização das tic em contexto educativo. representações e práticas de professores.», Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2008.

[14] C. Franco, «A utilização de recursos educativos digitais na sala de aula: Um componente fundamental no ensino?», Universidade Nova de Lisboa, Relatório de estágio, 2013.

[15] H. Capela, «A utilização de recursos digitais na aula de matemática», Dissertação de Mestrado, Universidade Católica Portuguesa, 2013.

[16] H. Camilo e J. Silva, «Os testes de escolha múltipla (tem)», *Revista Essência Educare*, nº 6, U. de Coimbra, ed., 2008.

[17] A. Pinto, «Factores relevantes na avaliação escolar por perguntas de escolha múltipla», *Psicologia, Educação e Cultura*, 2001.

[18] A. Cianflone, L. Troncon, M. Rodrigues e J. Figueiredo. (1994). Recomendações para a elaboração de testes de escolha múltipla. C. de Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto – USP Graduação, ed., endereço: `https://www.ufpe.br/medicina/images/Textos_recomendados/recomendacoes_para_a_elaboracao_de_testes_de_multipla_escolha.pdf`.

[19] J. Sampaio, «Avaliação na formação profissional - técnicas e instrumentos», *Formar pedagogicamente*, nº 6, I. do emprego e formação profissional, ed., 2006.

[20] G. do Estado de Minas Gerais – Secretaria de Estado de Educação, ed. (2010). Guia de elaboração e revisão de questões e itens de múltipla escolha, endereço: `http://www.adventista.edu.br/_imagens/area_academica/files/guia-de-elaboracao-de-itens-120804112623-phpapp01(3).pdf`.

[21] K. Neves, «Um exemplo de transposição didática: O caso das matrizes», Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[22] S. Luccas e I. Batista, «Abordagem histórico-filosófica e educação matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento», *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 6, nº 1, 2004.

[23] R. Santos. (2007). Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes. U. de São Paulo, ed., endereço: `http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf`.

[24] S. Luccas, «Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: Apresentação de uma proposta pedagógica», Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina, 2004.

[25] F. Rocha, «Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental: Método da substituição», Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2010.

[26] D. Silva, «Aprendizagens algébricas e o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 8º ano», Dissertação de mestrado, Universidade da Madeira, 2013.

[27] J. Ponte, *O ensino de Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?*, C. N. de Educação – Ministério da Educação e Ministério da Ciência e do Ensino Superior, ed. 2003.

[28] J. Ponte, J. Matos e P. Abrantes, *Investigação em Educação Matemática – implicações curriculares*, I. de Inovação Educacional, ed. 1998.

[29] C. Leite, P. Fernandes e A. Mouraz, «Contextualização curricular: Princípios e práticas», *Revista Interacções*, nº 22, F. de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade do Porto, ed., 2012.

[30] C. Alpalhão, «Os programas de matemática do ensino básico de 1990 e de 2007 e o processo de implementação do programa de 2007, no 1º ciclo do ensino básico», Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, 2010.

[31] J. Ponte, «Números e álgebra no currículo escolar», em *Números e álgebra na aprendizagem de Matemática e na formação de professores*, S. de educação matemática da sociedade portuguesa de ciências da educação, ed., 2006.

[32] A. Gomes, «Novos desafios à aprendizagem e autonomia em matemática. estudo crítico e comparativo», Tese de Doutoramento, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias Lisboa, 2013.

[33] B. Costa e M. Baldaque, *Novo Espaço 8*, P. Editora, ed. 2014.

[34] L. Faria, P. Almeida e C. Antão, *Matemática Dinâmica 8*, P. Editora, ed. 2014.

[35] J. Silva e M. Neves, *Matemática 8*, P. Editora, ed. 2014.

[36] P. Pereira e P. Pimenta, *Xis 8 - Matemática 8º ano*, L. Texto Editores, ed. 2014.

[37] A. Leite, A. Silva, J. Silva e M. Neves, *Matemática 7*, P. Editora, ed. 2015.

[38] I. Passos e O. Correia, *Matemática em Ação 7*, S. /. R. E. Lisboa Editora, ed. 2015.

[39] B. Costa e E. Rodrigues, *Novo Espaço 7*, P. Editora, ed. 2015.

[40] L. Faria, L. Guerreiro e P. Almeida, *Matemática Dinâmica 7*, P. Editora, ed. 2015.

[41] M. Vale, «O erro como ponte para a aprendizagem em matemática: Um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico», Dissertação de mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2010.

[42] V. Santos. (2012). Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau a duas incógnitas - um estudo com alunos do 8º ano. I. de educação da Universidade de Lisboa, ed., endereço: `http://w3.ualg.pt/~cfsousa/paginas/web%5C_cs%5C_ensino.htm`.

[43] R. B. M. Saraiva M. Pereira, *Sequências e expressões algébricas-Aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas*, APM, ed. 2010.

[44] S. Silva, «Erros e dificuldades no processo de ensinar e aprender a resolver sistemas de duas equações do 1º grau no 8º ano», Universidade do Minho, Relatório de estágio, 2012.

[45] R. Dias, «A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8º ano de escolaridade», Universidade de Lisboa, Relatório de estágio, 2012.

[46] Megua. (2015). Tutorial do megua. U. de Aveiro, ed., endereço: `https://dl.dropboxusercontent.com/u/10518224/megua/index.html`.

[47] G. Grätzer, *Math into Latex: An introduction to Latex and AMS - Latex*, B. Boston, ed. 1996.

[48] G. Silva. (2015). Phylos.net - computação, endereço: `http://phylos.net/computacao/sage/`.

[49] Sagemath. (2015). Sage. Sagemath, ed., endereço: `http://www.sagemath.org/pt/`.

[50] (2015). Python, endereço: `https://www.python.org/`.

[51] P. Cruz, P. Oliveira e D. Seabra, «Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados, Projeto megua», *Gazeta da Matemática*, nº 170, 2013.

[52] Megua. (2015). Construa a sua base de exercícios parametrizados sobre o sage math. U. de Aveiro, ed., endereço: `http://cms.ua.pt/megua/`.

[53] R. Costa, *Geração automática de exercícios de Matemática*, F. d. C. d. U. d. P. Departamento de Matemática Pura, ed. 2003.

[54] (2015). Autoria e ensino com exercícios parametrizados, endereço: `http://cnappes.pt/files/2015/07/joaopedrocruzCNAPPES2015.pdf`.

[55] SIACUA. (2015). Siacua. U. de Aveiro, ed., endereço: `http://siacua.web.ua.pt/`.

[56] F. Durão, *Lições de Matemática - Álgebra Linear*, U. P. .-.-. I. D. Henrique, ed. 1992.

[57] S. Lipschutz, *Álgebra Linear: Teoria e problemas*, M. Books, ed. 1994.

[58] C. Sousa. (2015). Apontamentos de álgebra linear e geometria analítica. U. do Algarve, ed., endereço: `http://w3.ualg.pt/~cfsousa/paginas/web%5C_cs%5C_ensino.htm`.

[59] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, L. McGraw-Hill, ed. 2001.

Anexo

Exercício 1

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_001}{E97H30_Sistema2Eqs_001}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares;  Classificação de sistemas; Sistemas de duas
equações a duas incógnitas;  sistema possível e determinado

   SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Considera o seguinte sistema de equações:

       $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
```

```
        \\
        \displaystyle mem21=mem22
        \end{array} \right.$$

Resolvendo-o analiticamente, indica o par ordenado
que corresponde à solução do sistema é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>

Pretende-se que a primeira equação seja resolvida em ordem a $x$ e a segunda em
ordem a $y$. Resolvendo, obtém-se que:
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle mem11=mem12\\
        \\
        \displaystyle mem21=mem22
        \end{array} \right.
        \Leftrightarrow
        \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle x=cor11\\
        \\
        \displaystyle y= cor12
        \end{array} \right.$$
   Logo,
a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_001(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-6,6,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        #teste variaveis
        s.af1=s.a1*s.f1
        s.cd1=s.c1*s.d1
        s.ca1=s.c1-s.a1*s.c1
        s.aa1=-s.a1*s.a1
        s.aa2=-s.aa1
        s.cd2=-s.cd1
        s.cdf1=s.f1-s.c1*s.d1
        s.ad1=-s.a1*s.d1
        s.ca2=s.c1+s.c1*s.a1
        if s.af1==s.cd1 or s.ca1==s.aa1 or s.af1==s.cd2 or s.cdf1==s.ad1 or
            s.ca2==s.aa2:
             s.a1=11
        #defining the equations
        s.mem11=s.a1*x
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*y
        s.mem22=s.f1

    def solve(s):
        #Correct answer
        s.cor11=s.c1/s.a1
        s.cor12=s.f1/s.d1
        #1 wrong answer
        s.err11=s.cor12
        s.err12=s.cor11
        #2 wrong answer
        s.err21=-s.cor11
        s.err22=-s.cor12
        #3 wrong answer
        s.err31=s.c1-s.a1
        s.err32=s.f1-s.d1
```

Exercício 2

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_002}{E97H30_Sistema2Eqs_002}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
```

incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado

```
   SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

Considera o sistema de equações:

```
       $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$
```

Resolvendo-o analiticamente, assinala o par ordenado
que corresponde à solução do sistema.

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
```

```
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>

<showone res1>
   <thisone>

   Pretende-se que a primeira equação esteja em
ordem a $x$ e a segunda equação em ordem a $y$. Resolvendo, resulta que:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle x=cor11\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.$$
Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$.

   </thisone>
   <thisone>

   A solução da primeira equação é $x=0$.
Resolvendo a segunda equação em ordem a $y$ resulta que:
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
       \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle x=cor11\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.$$

   Logo, a solução
```

```
do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$ .

</thisone>
   <thisone>

   A solução da segunda equação é $y=0$. Resolvendo
a primeira equação em ordem a $x$ resulta que:

   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
       \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle x=cor11\\
       \\
       \displaystyle y= cor12
       \end{array} \right.$$

   Logo, a
solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$ .

</thisone>
   <thisone>

   A solução da primeira equação é $x=0$ e a solução
da segunda equação é $y=0$, então tem-se que:
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
       \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle x=cor11\\
       \\
       \displaystyle y= cor12
```

\end{array} \right.$$

Logo, a
solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$.

</thisone>
</showone>

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_002(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')

        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
        s.c1=ur.iunif(-6,6)
        s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
        s.f1=ur.iunif(-9,9)

        #teste variaveis
        s.af1=s.a1*s.f1
        s.cd1=s.c1*s.d1
        s.ca1=s.c1-s.a1*s.c1
        s.aa1=-s.a1*s.a1
        s.cd2=-s.cd1
        s.cdf1=s.f1-s.c1*s.d1
        s.ad1=-s.a1*s.d1
        s.ca2=s.c1+s.c1*s.a1
        if s.af1==s.cd1 or s.ca1==s.aa1 or s.af1==s.cd2 or s.cdf1==s.ad1 or
            s.ca2==s.aa1:
            s.a1=11

        #defining the equations
        s.mem11=s.a1*x
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*y
        s.mem22=s.f1

    def solve(s):

        #Correct answer
        s.cor11=s.c1/s.a1
        s.cor12=s.f1/s.d1
        #1 wrong answer
        if s.c1==0:
```

```
            s.err11=s.a1
        else:
            s.err11=s.cor12
        if s.f1==0:
            s.err12=s.d1
        else:
            s.err12=s.cor11
        #2 wrong answer
        s.err21=-s.cor11
        if s.f1==0:
            s.err22=-s.d1
        else:
            s.err22=-s.cor12
        #3 wrong answer
        s.err31=s.c1-s.a1
        s.err32=s.f1-s.d1

        #Resolucao
        if s.c1==0:
            if s.f1==0:
                s.res1=3
            else:
                s.res1=1
        else:
            if s.f1==0:
                s.res1=2
            else:
                s.res1=0
```

Exercício 3

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_003}{E97H30_Sistema2Eqs_003}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução analítica de sistemas de duas equações a duas incógnitas
possíveis e determinados e classificação do sistema

E97H30 Equations and
inequalities: Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas
Palavras chave: Sistemas de equações lineares;  Classificação de sistemas;
Sistemas de duas equações a duas incógnitas;  Sistema possível e determinado;
Sistema possível e indeterminado; Sistema impossível
```

```
   SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Considera o sistema:

       $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle a1 x=mem12\\
       \\
       \displaystyle d1 y=mem22
       \end{array} \right.$$

   Indica qual é a
afirmação verdadeira.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice>
   <showone correct1>
   <thisone
caso0>
   É um sistema possível e indeterminado.
   </thisone>
   <thisone
caso0>
   Qualquer par ordenado de números reais, $(x,y)$,  é solução do sistema
de equações.
   </thisone>

   <thisone caso1>
   É um sistema impossível.
```

```
</thisone>
   <thisone caso1>
   O sistema de equações não tem solução.
</thisone>

   <thisone caso2>
   O sistema de equações é possível e
indeterminado.
   </thisone>
   <thisone caso2>
   O conjunto solução do sistema
é $\displaystyle \left\{\left(x,soly1\right):x \in \mathbb{R}\right\}$.
</thisone>

   <thisone caso3>
   O sistema de equações não tem solução.
</thisone>
   <thisone caso3>
   O sistema de equações é impossível.
</thisone>

   <thisone caso4>
   O sistema de equações é possível e
indeterminado.
   </thisone>
   <thisone caso4>
   O conjunto solução do sistema
é $\displaystyle \left\{\left(solx1,y\right): y \in \mathbb{R}\right\}$.
</thisone>

   <thisone caso5>
   O sistema de equações é impossível.
</thisone>
   <thisone caso5>
   O conjunto solução é $\emptyset$.
   </thisone>
<thisone caso6>
   O conjunto solução do sistema é
```

```
$\displaystyle\left\{\left(solx1,soly1\right)\right\}$.
   </thisone>
<thisone caso6>
   O sistema é possível e determinado.
   </thisone>
</showone>
    </choice>

   <choice>

   <showone wrong1>
   <thisone
caso0>
   O sistema não tem solução.
   </thisone>
   <thisone caso0>
   O
sistema é impossível.
   </thisone>

   <thisone caso1>
   O sistema é
possível e indeterminado.
   </thisone>
   <thisone caso1>
   Qualquer par
ordenado de números reais, $(x,y)$,  é solução do sistema de equações.
</thisone>

   <thisone caso2>
   O conjunto solução do sistema é
$\mathbb{R}^2$.
   </thisone>
   <thisone caso2>
   O sistema é possível e
determinado.
   </thisone>
```

```
   <thisone caso3>
   O sistema de equações é
possível e determinado.
   </thisone>
   <thisone caso3>
   O conjunto solução
do sistema de equações é $\mathbb{R}^2$.
   </thisone>

   <thisone caso4>
O sistema de equações é possível e determinado.
   </thisone>
   <thisone caso4>
A única solução do sistema é $\displaystyle \left(solx1,0\right)$.
   </thisone>
<thisone caso5>
   O sistema é possível e indeterminado.
   </thisone>
<thisone caso5>
   O conjunto solução do sistema de equações  é $\displaystyle
\left\{\left(solx1,0\right)\right\}$
   </thisone>

   <thisone caso6>
   O
sistema é impossível.
   </thisone>
   <thisone caso6>
   O conjunto solução do
sistema é $\mathbb{R}^2$.
   </thisone>
   </showone>
    </choice>
<choice>
   <showone wrong2>
   <thisone caso0>
   O conjunto solução é
$\emptyset$.
```

```
   </thisone>
   <thisone caso0>
   O conjunto solução do sistema
de equações é $\left\{\left(a1,d1\right)\right\}$.
   </thisone>

   <thisone
caso1>
   O sistema de equações admite uma única solução.
   </thisone>
<thisone caso1>
   O conjunto solução do sistema de equações é $\{(0,0)\}$.
</thisone>

   <thisone caso2>
   O sistema é impossível.
   </thisone>
<thisone caso2>
   O conjunto solução do sistema de equações é $\emptyset$.
</thisone>

   <thisone caso3>
   O sistema é possível e indeterminado.
</thisone>
   <thisone caso3>
   Qualquer par ordenado de números reais,
$(x,y)$,  é solução do sistema de equações.
   </thisone>

   <thisone caso4>
O sistema de equações é impossível.
   </thisone>
   <thisone caso4>
   O
conjunto solução do sistema de equações é $\{(0,0)\}$.
   </thisone>
<thisone caso5>
   Qualquer par ordenado de números reais, $(x,y)$,  é solução
```

```
do sistema de equações.
   </thisone>
   <thisone caso5>
   O sistema de
equações tem uma única solução.
   </thisone>

   <thisone caso6>
   O
sistema de equações é possível e indeterminado.
   </thisone>
   <thisone caso6>
O conjunto solução do sistema é
 $\displaystyle\left\{\left(x,soly1\right): x \in
\mathbb{R}\right\}$.
   </thisone>
   </showone>
   </choice>
<choice>
   <showone wrong3>
   <thisone caso0>
   O sistema é possível e
determinado.
   </thisone>
   <thisone caso0>
   O sistema tem uma única
solução.
   </thisone>

   <thisone caso1>
   O sistema é possível e
determinado.
   </thisone>
   <thisone caso1>
   O sistema tem uma única
solução.
   </thisone>
```

```
   <thisone caso2>
   O sistema é possível e
determinado.
   </thisone>
   <thisone caso2>
   O conjunto solução é
$\displaystyle\left\{\left(0,soly1\right)\right\}$.
   </thisone>
<thisone caso3>
   O sistema tem uma única solução.
   </thisone>
   <thisone
caso3>
   A solução do sistema é $(0,0)$.
   </thisone>

   <thisone caso4>
O sistema não tem solução.
   </thisone>
   <thisone caso4>
   O conjunto
solução do sistema de equações é $\emptyset$.
   </thisone>

   <thisone
caso5>
   O sistema é possível e determinado.
   </thisone>
   <thisone caso5>
O conjunto solução do sistema de equações é $\mathbb{R}^2$.
   </thisone>
<thisone caso6>
   O conjunto solução do sistema de equações é
$\displaystyle\left\{(\left(solx1,y\right): y \in \mathbb{R}\right\}$.
</thisone>
   <thisone caso6>
   O sistema de equações tem uma infinidade de
soluções.
```

```
   </thisone>
   </showone>
   </choice>
   </multiplechoice>
<showone casos1>
   <thisone caso0>
   <br>A equação $0x=0$ é uma equação
possível mas indeterminada já que qualquer valor de $x$ real satisfaz a
igualdade.</br>
   <br> Do mesmo modo, a equação $0y=0$ é indeterminada e
portanto, qualquer que seja $y$ número real, esta segunda igualdade se
verifica.</br> <br>Qualquer par ordenado $(x,y)$ é solução da
equação e assim, o
conjunto solução é $\mathbb{R}^2$.</br>

   O sistema é possível e
indeterminado.
   </thisone>



   <thisone caso1>
   <br>A equação
$0x=0$ é uma equação possível mas indeterminada já que qualquer valor de $x$
real satisfaz a igualdade.</br>
   <br> Contudo, a equação $0y=f1$ é
impossível.</br>
    Assim, o sistema de equações não tem solução, isto é, o seu
conjunto solução é $\emptyset$ e o sistema diz-se impossível.
   </thisone>
<thisone caso2>
   <br>A equação $0x=0$ é uma equação possível mas indeterminada
já que qualquer valor de $x$ real satisfaz a igualdade.</br>
   <br> Quanto à
segunda equação, $mem21=mem22$, ela é equivalente a $y=soly1$. A equação é
possível e determinada e a sua solução é $ \displaystyle  \left\{ soly1 \right\}
$. </br>

   <br>Neste caso o sistema é possível e indeterminado e as
```

```
soluções são da forma $\left(x,soly1\right)$, onde $x$ é um qualquer número
real. </br>
   O conjunto solução é
   $$\left\{\left(x,soly1\right): x \in
\mathbb{R}\right\}$$
   </thisone>



   <thisone caso3>
   <br> A equação
$0x=c1$ é uma equação impossível, uma vez que $0=c1$ é uma proposição
falsa.</br>
   <br> A segunda equação do sistema também é uma equação
impossível.</br>
   Assim, o sistema de equações não tem solução, isto é, o seu
conjunto solução é $\emptyset$ e o sistema diz-se impossível.
   </thisone>
<thisone caso4>
   <br>A equação $mem11=mem12$ é uma equação possível e
determinada. A sua solução é $ \displaystyle  \left\{ solx1 \right\} $. </br>
<br>A segunda equação é uma equação indeterminada já que qualquer que seja $y$
real  a igualdade é satisfeita.</br>
   <br> Assim, o sistema de equações é um
sistema possível e indeterminado e as suas soluções são da forma $
\left(solx1,y\right)$ onde $y$ é um qualquer número real. </br>
   O conjunto
solução do sistema é
   $$\left\{\left(solx1,y\right): y \in
\mathbb{R}\right\}$$
   </thisone>



   <thisone caso5>
   A equação
$mem11=mem12$ é uma equação possível e determinada.
   <br>A sua solução é $ S=
\displaystyle  \left\{ solx1 \right\} $. </br>
   <br> A segunda equação $d1
```

```
y=mem22$ é uma equação impossível já que não existe $y$ real que satisfaça a
igualdade.</br>
   Assim, o sistema de equações é um sistema impossível, isto
é, não admite solução. Portanto, o conjunto solução do sistema é $\emptyset$.
</thisone>



   <thisone caso6>
   <br>A equação $mem11=mem12$ é uma
equação possível e determinada.
A sua solução é  $ \displaystyle  \left\{ solx1
\right\} $. </br>
   <br>A segunda equação $mem21=mem22$ é  também uma equação
possível e a solução é $ \displaystyle  \left\{ soly1 \right\} $. </br>
<br>Assim, o sistema de equações é um sistema possível e
determinado e a sua
solução é $\left(solx1,soly1\right)$.</br>
   Portanto, o conjunto solução do
sistema é $\left\{\left(solx1,soly1\right)\right\}$.

   </thisone>
</showone>
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_003(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')

        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[-1,1])
        s.c1=ur.iunif(-6,6)
        s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[-1,1])
        s.f1=ur.iunif(-9,9)

        #defining the equations
        s.mem11=s.a1*x
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*y
        s.mem22=s.f1
```

```
def solve(s):

    #Resolucao

    if s.a1==0:
        if s.c1==0:
            if s.d1==0:
                if s.f1==0:
                    s.casos1=0
                    s.res1=0
                    s.sol1=0
                else:
                    s.casos1=1
                    s.res1=1
                    s.sol1=1
            else:
                s.res1=0
                s.casos1=2
                s.soly1=s.f1/s.d1
                s.sol1=2
        else:
            s.casos1=3
            s.res1=1
            s.sol1=1
    else:
        s.solx1=s.c1/s.a1
        if s.d1==0:
            if s.f1==0:
                s.casos1=4
                s.res1=0
                s.sol1=3
            else:
                s.casos1=5
                s.res1=1
                s.sol1=1
        else:
            s.casos1=6
            s.soly1=s.f1/s.d1
            s.res1=2
            s.sol1=4

    #Correct answer
    s.par1=ur.iunif(0,1)
    if s.casos1==0:
        if s.par1==0:
            s.correct1=0
            s.wrong1=0
            s.wrong2=0
            s.wrong3=0
        else:
            s.correct1=1
            s.wrong1=1
            s.wrong2=1
```

```
            s.wrong3=1
    elif s.casos1==1:
        if s.par1==0:
            s.correct1=2
            s.wrong1=2
            s.wrong2=2
            s.wrong3=2
        else:
            s.correct1=3
            s.wrong1=3
            s.wrong2=3
            s.wrong3=3
    elif s.casos1==2:
        if s.par1==0:
            s.correct1=4
            s.wrong1=4
            s.wrong2=4
            s.wrong3=4
        else:
            s.correct1=5
            s.wrong1=5
            s.wrong2=5
            s.wrong3=5
    elif s.casos1==3:
        if s.par1==0:
            s.correct1=6
            s.wrong1=6
            s.wrong2=6
            s.wrong3=6
        else:
            s.correct1=7
            s.wrong1=7
            s.wrong2=7
            s.wrong3=7
    elif s.casos1==4:
        if s.par1==0:
            s.correct1=8
            s.wrong1=8
            s.wrong2=8
            s.wrong3=8
        else:
            s.correct1=9
            s.wrong1=9
            s.wrong2=9
            s.wrong3=9
    elif s.casos1==5:
        if s.par1==0:
            s.correct1=10
            s.wrong1=10
            s.wrong2=10
            s.wrong3=10
        else:
            s.correct1=11
            s.wrong1=11
```

```
                s.wrong2=11
                s.wrong3=11
        elif s.casos1==6:
            if s.par1==0:
                s.correct1=12
                s.wrong1=12
                s.wrong2=12
                s.wrong3=12
            else:
                s.correct1=13
                s.wrong1=13
                s.wrong2=13
                s.wrong3=13
```

Exercício 4

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_004}{E97H30_Sistema2Eqs_004}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares;  Classificação de sistemas; Sistemas de duas
equações a duas incógnitas;  sistema possível e determinado

SIACUAstart
   level=2;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251,
1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Considera o sistema:
```

```
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle mem11=mem12\\
\\
\displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.$$

   Resolvendo
analiticamente, indica a solução do sistema.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>
Começamos por resolver a segunda equação em ordem a $x$.
    $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right. \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.$$

   Vamos agora
substituir o valor de $x$ na primeira equação e resolver
```

```
essa equação em ordem a
$y$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle a1 \times
cor11@() sgn1 b11y=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
\end{array} \right.
       \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle memaux1=mem12\\
       \\
\displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.
       card2\Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       card2\displaystyle b1y=mem12 sgn2
res21\\
       card2\\
       card2\displaystyle x=cor11
       card2\end{array}
\right.
       \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle b1y=mudamembro1\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
\end{array} \right. \\
       card1 \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       card1 \displaystyle y=cor12\\
       card1\\
card1 \displaystyle x=cor11
       card1\end{array} \right.
       $$
Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_004(Exercise):

        def make_random(s):
            x=var('x')
            y=var('y')

            #defining the parameters of the system
            s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
            s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
            s.c1=ur.iunif_nonset(-6,6,[0])
            s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
            s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

            #teste variaveis
         s.abf1=s.f1*s.a1+s.f1*s.b1
         s.cd1=s.c1*s.d1
         s.af1=-s.f1*s.d1+s.d1^2
         s.cd2=-s.f1
         s.acdf1=s.b1*s.d1^2
         s.acdf2=s.c1*s.d1*s.f1-s.a1*s.f1^2
         s.cdaf11=-s.f1^2+s.d1*s.f1
         s.fbdbd11=-s.d1
         s.aaanovo1=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1
         s.aaanovo2=s.f1*s.b1*s.d1-s.b1*s.d1^2
         s.teste11=s.f1^2
         s.teste22=s.d1^2

         if s.abf1==s.cd1 or s.af1==s.cd2 or s.acdf1==s.acdf2 or
             s.cdaf11==s.fbdbd11 or s.aaanovo1==s.aaanovo2 or
             s.teste11==s.teste22:
              s.d1=11

            #defining the equations
            s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
            s.mem12=s.c1
            s.mem21=s.d1*x
            s.mem22=s.f1

        def solve(s):

            #Correct answer
            s.cor11=s.f1/s.d1
            s.aux11=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1
            s.aux12=s.b1*s.d1
            s.cor12=s.aux11/s.aux12
            #1 wrong answer
            s.err11=1/s.cor11
            s.auxe11=s.c1*s.f1-s.a1*s.d1
            s.auxe12=s.f1*s.b1
            s.err12=s.auxe11/s.auxe12
            #2 wrong answer
            s.err21=s.cor12
            s.err22=s.cor11
            #3 wrong answer
```

```
s.err31=s.f1-s.d1
s.auxe31=s.c1-s.a1*s.f1+s.d1*s.a1
s.auxe32=s.b1
s.err32=s.auxe31/s.auxe32

#Resolucao
s.b11=abs(s.b1)
if s.b1<0:
    s.sgn1='-'
else:
    s.sgn1='+'
s.res1=s.cor11*s.a1
s.b11y=s.b11*y
s.b1y=s.b1*y
s.afd1=s.a1*s.f1/s.d1
s.memaux1=s.afd1+s.b1*y
s.mudamembro1=s.c1-s.res1
s.res2=-s.res1
s.res21=abs(s.res2)
if s.res2 <0:
    s.sgn2='-'
else:
    s.sgn2='+'
if s.b1==1:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''


if s.c1==0:
    s.card2='%'
else:
    s.card2=''
```

Exercício 5

%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30_Sistema2Eqs_005}{E97H30_Sistema2Eqs_005}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:

Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado

```
   SIACUAstart
level=2;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Considera o seguinte sistema de equações:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$

Resolvendo analiticamente o sistema,
a
solução do sistema é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
```

```
   </multiplechoice>
<showone res1>
   <thisone>

   Começamos por resolver a segunda equação em
ordem a $y$.
    $$ \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array}
\right. \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
\end{array} \right.$$

   Substituindo o valor de $y$ na primeira equação,
resolve-se essa equação em ordem a $x$.
   $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle novoa1 sgn1 b11 \times cor12@()
=mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle a1x
sgn2 res2 =mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array}
\right.
       card2\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card2\displaystyle a1x =mem12 sgn3 res33\\
       card2\\
card2\displaystyle y=cor12
```

```
       card2\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
a1x=mudamembro1\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array}
\right.
       card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle x=cor11\\
       card1\\
       card1\displaystyle y=cor12
card1\end{array} \right.
       $$

   Logo, a solução do sistema é
$$(x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right)$$

   </thisone>
<thisone>

   Substituindo o valor de $y$ na primeira equação, resolve-se
essa equação em ordem a $x$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle novoa1 sgn1 b11 \times cor12@() =mem12\\
       \\
\displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle a1x sgn2 res2
=mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
card2\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card2\displaystyle a1x =mem12 sgn3 res33\\
       card2\\
```

```
card2\displaystyle y=cor12
       card2\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
a1x=mudamembro1\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array}
\right.
       card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle x=cor11\\
       card1\\
       card1\displaystyle y=cor12
card1\end{array} \right.
       $$

   Logo, a solução do sistema é
$$(x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right)$$
</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_005(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')

        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.c1=ur.iunif(-6,6)
        s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

        #teste variaveis
        s.ce1=s.c1*s.e1
        s.abf2=s.f1*(s.a1+s.b1)
        s.af1=s.a1*s.f1^2
        s.bcef2=s.c1*s.e1*s.f1*-s.b1*s.e1^2
        s.abf1=s.f1*(s.a1-s.b1)
        s.ce2=s.c1*s.e1
```

```
    if s.ce1==s.abf2 or s.af1==s.bcef2 or s.abf1==s.ce2:
        s.a1=11

    #defining the equations
    s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
    s.mem12=s.c1
    s.mem21=s.e1*y
    s.mem22=s.f1

def solve(s):

    #Correct answer
    s.aux11=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1
    s.aux12=s.a1*s.e1
    s.cor11=s.aux11/s.aux12
    s.cor12=s.f1/s.e1
    #1 wrong answer
    s.err21=s.cor12
    s.err22=s.cor11
    #2 wrong answer
    s.auxe11=s.c1*s.f1-s.b1*s.e1
    s.auxe12=s.a1*s.f1
    s.err11=s.auxe11/s.auxe12
    if s.f1^2==s.e1^2:
        s.err12=0
    else:
        s.err12=1/s.cor12
    #3 wrong answer
    s.auxe31=s.c1*s.e1+s.b1*s.f1
    s.auxe32=s.e1*s.a1
    s.err31=s.auxe31/s.auxe32
    s.err32=s.cor12

    #Resolucao
    s.res1=s.cor12*s.b1
    s.res2=abs(s.res1)
    if s.res1<0:
        s.sgn2='-'
    else:
        s.sgn2='+'
    s.mudamembro1=s.c1-s.res1
    s.b11=abs(s.b1)
    if s.b1<0:
        s.sgn1='-'
    else:
        s.sgn1='+'
    s.res3=s.b1*s.cor12
    s.res33=abs(s.res3)
    if s.res3<0:
        s.sgn3='+'
    else:
        s.sgn3='-'
```

```
    if s.e1==1:
        s.res1=1
    else:
        s.res1=0


    s.novoa1=s.a1*x
    s.a1x=s.a1*x

    if s.a1==1:
        s.card1='%'
    else:
        s.card1=''

    if s.c1==0:
        s.card2='%'
    else:
        s.card2=''
```

Exercício 6

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_006}{E97H30_Sistema2Eqs_006}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares;  Classificação de sistemas; Sistemas de duas
equações a duas incógnitas;  sistema possível e determinado

SIACUAstart
   level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251,1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Considera o sistema:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$

  Resolvendo-o analiticamente, o par ordenado que corresponde
   à solução do sistema é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>
Começamos por resolver a segunda equação em ordem a $x$.
    $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
```

```
        \displaystyle d11=f1 sgn1 e11
        \end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle mem11=mem12\\
        \\
        \displaystyle d11=conta1
        \end{array}
\right.
        card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle mem11=mem12\\
        card1\\
        card1\displaystyle
x=cor11
        card1\end{array} \right.
        $$
```

```
   Vamos agora
substituir o valor de $x$ na primeira equação e resolver essa
equação em ordem a
$y$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle  a1 \times
cor11@() sign1 b11=mem12\\
        \\
        \displaystyle x=cor11
\end{array} \right.
        \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle conta2 sgn4 b11=mem12\\
        \\
\displaystyle x=cor11
        \end{array} \right.
        card3\Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        card3\displaystyle b12=mem12 sgn2
conta3\\
        card3\\
```

```
        card3\displaystyle x=cor11
card3\end{array} \right.
        \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle b12=conta4\\
        \\
\displaystyle x=cor11
        \end{array} \right.
        card2\Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        card2\displaystyle y=cor12\\
card2\\
        card2\displaystyle x=cor11
        card2\end{array} \right.
$$

   Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle
\left(cor11,cor12\right) $$
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_006(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')

        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.c1=ur.iunif(-6,6)
        s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

    #teste variaveis
     s.efb1=s.f1*s.b1-s.e1*s.b1
     s.abcdef=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1+s.a1*s.e1
     s.efb2=s.f1*s.b1+s.e1*s.b1
     s.efb3=s.b1*s.e1-s.b1*s.f1

     if s.abcdef==s.efb1 or s.abcdef==s.efb2 or
     s.abcdef==s.efb3 or s.f1==s.e1:
```

```
        s.f1=11

        #defining the equations
        s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*x+s.e1
        s.mem22=s.f1

    def solve(s):

        #Correct answer
        s.aux11=s.f1-s.e1
        s.aux112=s.d1
        s.cor11=s.aux11/s.aux112
        s.aux121=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1+s.a1*s.e1
        s.aux122=s.b1*s.d1
        s.cor12=s.aux121/s.aux122
        #1 wrong answer
        s.auxe111=s.c1*s.d1-s.a1*s.f1+s.a1*s.e1
        s.err11=s.auxe111/s.aux122
        s.auxe121=s.f1-s.e1
        s.auxe122=s.d1
        s.err12=s.auxe121/s.auxe122
        #2 wrong answer
        s.auxe211=s.f1+s.e1
        s.auxe212=s.d1
        s.err21=s.auxe211/s.auxe212
        s.auxe221=s.d1*s.c1-s.a1*s.f1-s.e1*s.a1
        s.err22=s.auxe221/s.aux122
        #3 wrong answer
        s.auxe311=s.f1-s.e1
        s.auxe312=-s.d1
        s.err31=s.auxe311/s.auxe312
        s.auxe321=s.d1*s.c1+s.a1*s.f1-s.e1*s.a1
        s.err32=s.auxe321/s.aux122

        #Resolucao
        s.e11=abs(s.e1)
        if s.e1<0:
            s.sgn1='+'
        else:
            s.sgn1='-'
        s.conta1=s.f1-s.e1
        s.cor11=s.conta1/s.d1
        s.conta2=s.a1*s.cor11
        s.conta3=abs(s.conta2)
        if s.conta2<0:
            s.sgn2='+'
        else:
            s.sgn2='-'

        s.b11=abs(s.b1)
        if s.b1<0:
            s.sign1='-'
```

```
        else:
            s.sign1='+'

        s.conta4=s.c1-s.conta2
        if s.b1<0:
            s.sgn4='-'
        else:
            s.sgn4='+'

        #esconder o 1
        s.d11=s.d1*x
        s.b11=s.b11*y
        s.b12=s.b1*y

        #esconder ultimo sistema equivalente
        if s.d1==1:
            s.card1='%'
        else:
            s.card1=''

        if s.b1==1:
            s.card2='%'
        else:
            s.card2=''


        if s.cor11==0:
            s.card3='%'
        else:
            s.card3=''


        if s.c1==0:
            s.card3='%'
        else:
            s.card3=''
```

Exercício 7

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_007}{E97H30_Sistema2Eqs_007}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados
```

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado

SIACUAstart
   level=2; slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251,
1)]
   SIACUAend

%PROBLEM Substituindo variáveis

Resolve analiticamente o seguinte sistema de equações:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$

   Qual
é o par ordenado que corresponde à solução do sistema?

%ANSWER

<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle

```
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>
Começamos por resolver a segunda equação em ordem a $y$.
    $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
       \\
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle mem11=mem12\\
\\
       \displaystyle e11=f1 sgn1 d12
       \end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
mem11=mem12\\
       \\
       \displaystyle e11=conta1
       \end{array}
\right.
       card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle mem11=mem12\\
       card1\\
       card1\displaystyle
y=cor12
       card1\end{array} \right.
       $$


   Vamos agora substituir o valor de $y$ na primeira equação
   e resolver essa equação em ordem a
$x$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle  a11 sgn3
b111 \times cor12@() =mem12\\
       \\
```

```
        \displaystyle y=cor12
\end{array} \right.
        card3\Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
        card3\displaystyle a11 sgn4 conta22 =mem12\\
card3\\
        card3\displaystyle y=cor12
        card3\end{array} \right.
card4 card3\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        card4
card3\displaystyle a11=mem12 sgn2 conta3\\
        card4 card3\\
        card4
card3\displaystyle y=cor12
        card4 card3\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
        \displaystyle
a11=conta4\\
        \\
        \displaystyle y=cor12
        \end{array} \right.
card2\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card2\displaystyle x=cor11\\
        card2\\
        card2\displaystyle y=cor12
card2\end{array} \right.
        $$

   Logo, a solução do sistema é $$
(x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_007(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
```

```
    #defining the parameters of the system
    s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

    s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[-1,0,1])

    s.c1=ur.iunif(-6,6)

    s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

    s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])

    s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

    #teste variaveis
    s.teste11=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1+s.b1*s.d1
    s.teste12=s.f1*s.a1-s.d1*s.a1
    s.teste21=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1+s.b1*s.d1
    s.teste22=s.a1*s.e1*s.b1*s.d1+s.a1*s.e1^2*s.b1+
s.a1*s.e1*s.c1-s.a1*s.e1*s.b1*s.f1-s.a1^2*s.e1
    s.teste31=s.f1-s.d1
    s.teste32=s.b1*s.d1*s.e1+s.e1^2*s.b1+s.c1*s.e1-s.b1*
s.f1*s.e1-s.a1*s.e1
    s.teste61=-s.b1*s.f1+s.b1*s.d1
    s.teste62=-s.f1+s.d1

    if s.teste11==s.teste12 or s.teste21==s.teste22 or
        s.teste31==s.teste32 or s.teste61==s.teste62:
        s.f1=11


    #defining the equations
    s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
    s.mem12=s.c1
    s.mem21=s.d1+s.e1*y
    s.mem22=s.f1

def solve(s):

    #Correct answer
    s.aux111=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1+s.b1*s.d1
    s.aux112=s.a1*s.e1
    s.cor11=s.aux111/s.aux112
    s.aux121=s.f1-s.d1
    s.aux122=s.e1
    s.cor12=s.aux121/s.aux122
    #1 wrong answer
    if s.cor11==s.cor12:
        s.err11=-s.cor12
    else:
        s.err11=s.cor12
    s.err12=s.cor11
    #2 wrong answer
    s.err21=s.b1*s.d1+s.e1*s.b1+s.c1-s.b1*s.f1-s.a1
```

```
s.err22=s.f1-s.d1-s.e1
#3 wrong answer
s.absolutob1=abs(s.b1)
s.auxe311=s.f1-s.d1
s.auxe312=s.e1
s.err31=s.auxe311/s.auxe312
s.auxe321=s.c1*s.b1*s.e1-s.absolutob1*(s.f1-s.d1)
s.auxe322=s.a1*s.b1*s.e1
s.err32=s.auxe321/s.auxe322

#Resolucao
s.e11=s.e1*y
s.d12=abs(s.d1)
if s.d1<0:
    s.sgn1='+'
else:
    s.sgn1='-'

s.conta1=s.f1-s.d1
s.conta2=s.b1*s.cor12
s.conta3=abs(s.conta2)
if s.conta2<0:
    s.sgn2='+'
else:
    s.sgn2='-'
s.a11=s.a1*x
s.conta4=s.c1-s.conta2

s.b111=abs(s.b1)
if s.b1<0:
    s.sgn3='-'
else:
    s.sgn3='+'

s.conta22=abs(s.conta2)
if s.conta2<0:
    s.sgn4='-'
else:
    s.sgn4='+'


#esconder ultimo sistema equivalente
if s.e1==1:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''

if s.a1==1:
    s.card2='%'
else:
    s.card2=''


if s.cor12==0:
```

```
        s.card3='%'
    else:
        s.card3=''


    if s.c1==0:
        s.card4='%'
    else:
        s.card4=''
```

Exercício 8

%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30_Sistema2Eqs_008}{E97H30_Sistema2Eqs_008}

\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }

Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado

SIACUAstart
level=2; slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
concepts = [(5251,
1)]
SIACUAend

%PROBLEM Substituindo variáveis

Resolve analiticamente o seguinte sistema de equações:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}

```
        \displaystyle mem11=mem12\\
\\
        \displaystyle mem21=mem22
        \end{array} \right.$$

    Qual
é o par ordenado que corresponde à solução do sistema?
```

%ANSWER

```
    <multiplechoice>
<choice> $$\displaystyle \left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err11,err12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err21,err22\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle \left(err31,err32\right)$$ </choice>
</multiplechoice>

Começamos por resolver a primeira equação em ordem a $x$.
 $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle mem11=mem12\\
    \\
    \displaystyle mem21=mem22
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle a1x=c1 sgn1 b13\\
    \\
    \displaystyle mem21=mem22
    \end{array} \right.
    card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card1\displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1} \\
    card1\\
    card1\displaystyle mem21=mem22
    card1\end{array} \right.
    card10\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card10\displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11} \\
    card10\\
    card10\displaystyle mem21=mem22
```

```
    card10\end{array} \right.
    $$

<showone res1>
<thisone>

Vamos agora substituir o valor de $x$ na segunda equação e
resolver essa equação em ordem a $y$.
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle  x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    \\
    \displaystyle d1 \times \frac{c1 sgn1 b13}{a1} sgn111 e1111 = f1
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    \\
    \displaystyle \frac{conta1 sgncerta1 contacerta1}{a1} sgn111 e1111 = f1
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle  x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    \\
    \displaystyle conta1 sgncerta1 contacerta1 sgn111 conta3 = conta4
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    \\
    \displaystyle contacerta sgn111 conta3 = conta4 contanao
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    \\
    \displaystyle conta5=conta6
    \end{array} \right.
    card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card1\displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    card1\\
    card1\displaystyle y=\frac{conta6}{conta9}
    card1\end{array} \right.
```

```
    card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card1\displaystyle x= \frac {c1 sgn1 b13}{a1}\\
    card1\\
    card1\displaystyle y=cor12
    card1\end{array} \right.
    $$

Agora substitui-se o valor numérico de $y$  na primeira
equação e determina-se o valor de $x$.

 $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {c1 sgn1 b12 \times cor12@()}{a1}\\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {c1 sgn3 conta1010}{a1}\\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {conta11}{a1}\\
    \\

    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=cor11 \\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    $$

Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$

</thisone>
<thisone>
```

```
Vamos agora substituir o valor de $x$ na segunda equação e
resolver essa equação em ordem a $y$.
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle  x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    \\
    \displaystyle d1 \times \frac {c11 sgn9 b1444}{a11} sgn111 e1111 = f1
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    \\
    \displaystyle \frac{conta21 sgnovo1 contanovo1}{a11} sgn111 e1111 = f1
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle  x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    \\
    \displaystyle conta21 sgnovo1 contanovo1 sgn111 conta32 = conta42
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    \\
    \displaystyle conta25 sgn111 conta32= conta42 sign1 contamais21
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    \\
    \displaystyle conta52=conta62
    \end{array} \right.
    card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card1\displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    card1\\
    card1\displaystyle y=\frac{conta62}{conta53}
    card1\end{array} \right.
    card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    card1\displaystyle x= \frac {c11 sgn9 b1444}{a11}\\
    card1\\
    card1\displaystyle y=cor12
    card1\end{array} \right.
    $$
```

```
Agora substitui-se o valor numérico de $y$  na primeira equação
 e determina-se o valor de $x$.

 $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {c11 sgn9 b144 \times cor12@()}{a11}\\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {c11 sgn3 conta1010}{a11}\\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=\frac {conta111}{a11}\\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
    \displaystyle x=cor11 \\
    \\
    \displaystyle y=cor12
    \end{array} \right.
    $$

Logo, a solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle \left(cor11,cor12\right) $$

</thisone>
</showone>
```

Programação

```python
class E97H30_Sistema2Eqs_008(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
```

```
    #defining the parameters of the system
    s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.c1=ur.iunif_nonset(-6,6,[0])
    s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])

    #teste variaveis
    s.teste001=s.e1*s.a1
    s.teste002=s.d1*s.b1
    s.teste11=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1
    s.teste12=s.f1*s.a1-s.d1*s.c1
    s.teste22=s.a1*s.b1*s.f1+s.c1*s.e1*s.a1-s.a1^2*s.e1+
  s.a1*s.d1*s.b1
    s.teste31=s.c1*s.e1^2-s.c1*s.e1*s.b1*s.d1-s.b1*s.e1*s.f1+
s.b1^2*s.d1*s.f1
    s.teste32=s.e1*s.a1*s.f1-s.e1*s.a1*s.d1*s.c1+s.e1*s.d1*s.a1^2
-s.d1*s.b1*s.f1+s.d1^2*s.b1*s.c1-s.d1^2*s.b1*s.a1
    s.teste42=s.f1*s.e1*s.a1-s.f1*s.d1*s.b1-s.e1*s.a1*s.d1*s.c1
+s.e1*s.a1^2*s.d1-s.e1^2*s.a1+s.e1*s.a1*s.d1*s.b1+s.d1^2*s.b1*s.c1
-s.d1^2*s.b1*s.a1+s.d1*s.b1*s.e1-s.d1^2*s.b1^2
    s.teste52=s.e1*s.a1*s.f1-s.d1*s.c1*s.e1*s.a1+s.d1*s.a1^2*s.e1
-s.e1^2*s.a1+s.d1*s.b1*s.e1*s.a1-s.d1*s.b1*s.f1+s.d1^2*s.b1*s.c1
-s.d1^2*s.b1*s.a1+s.d1*s.b1*s.e1-s.d1^2*s.b1^2
    s.teste61=s.f1-s.d1*s.c1+s.d1*s.a1
    s.teste62=s.f1*s.e1-s.d1*s.c1*s.e1+s.d1*s.a1*s.e1-s.e1^2+
s.d1*s.b1*s.e1-s.d1*s.b1*s.f1+s.d1^2*s.b1*s.c1-s.d1^2*s.a1*s.b1+
s.e1*s.b1*s.d1-s.d1^2*s.b1^2

    if s.teste001==s.teste002 or s.e1==s.teste002 or s.teste11==s.teste12
        or s.teste11==s.teste22 or
    s.teste31==s.teste32 or s.teste12==s.teste42 or s.teste11==s.teste52
        or s.teste61==s.teste62:
        s.d1=11

    #defining the equations
    s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
    s.mem12=s.c1
    s.mem21=s.d1*x+s.e1*y
    s.mem22=s.f1

def solve(s):

    #Correct answer
    s.aux111=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1
    s.aux112=s.e1*s.a1-s.d1*s.b1
    s.cor11=s.aux111/s.aux112
    s.aux121=s.f1*s.a1-s.d1*s.c1
    s.aux122=s.e1*s.a1-s.d1*s.b1
    s.cor12=s.aux121/s.aux122
    #1 wrong answer
    s.err11=s.cor12
```

```
    s.err12=s.cor11
    #2 wrong answer
    s.auxe211=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1-s.a1*s.e1
    s.auxe212=s.e1-s.d1*s.b1
    s.err21=s.auxe211/s.auxe212
    s.auxe221=s.f1-s.d1*s.c1+s.d1*s.a1
    s.err22=s.auxe221/s.auxe212
    #3 wrong answer
    s.err31=-s.b1*s.f1+s.d1*s.b1*s.c1-s.d1*s.b1*s.a1+s.b1*s.e1
-s.d1*s.b1^2+s.c1-s.a1
    s.err32=s.f1-s.d1*s.c1+s.d1*s.a1-s.e1+s.d1*s.b1

    #Resolucao
    s.a11=s.a1*x
    s.b11=s.b1*y

    s.b12=abs(s.b1)
    s.b13=s.b12*y
    if s.b1<0:
        s.sgn1='+'
    else:
        s.sgn1='-'

    s.e111=abs(s.e1)
    s.e1111=s.e111*y
    if s.e1<0:
        s.sgn111='-'
    else:
        s.sgn111='+'

    s.conta1=s.d1*s.c1
    s.contanao=-s.conta1

    s.d11=abs(s.d1)
    if s.d1<0:
        s.sgn2='-'
    else:
        s.sgn2='+'

    s.contacerta=-s.d1*s.b1*y
    s.contacerta0=s.d1*s.b1
    s.contacerta00=abs(s.contacerta0)
    if s.contacerta0<0:
        s.sgncerta1='+'
    else:
        s.sgncerta1='-'
    s.contacerta1=s.contacerta00*y

    s.conta222=s.d11*s.b13
    s.conta2=s.d1*s.b13

    s.conta3=s.e1111*s.a1
    s.conta4=s.f1*s.a1
```

```
s.conta5=-s.d1*s.b1*y+s.e1*s.a1*y
s.conta6=s.conta4-s.conta1

s.conta7=s.e111*s.a1
s.conta8=s.b12*s.d1
s.conta9=-s.d1*s.b1+s.e1*s.a1

s.conta10=s.b12*s.cor12

s.conta1010=abs(s.conta10)
if s.conta10<0:
    s.sgn3='-'
else:
    s.sgn3='+'

s.conta11=s.c1+s.conta10

#esconder ultimo sistema equivalente
if s.conta9==-1:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''

if s.a1<0:
    s.card10=''
else:
    s.card10='%'

s.c11=-s.c1
s.b14=-s.b13

s.b144=abs(s.b1)
if s.b1<0:
    s.sgn9='-'
else:
    s.sgn9='+'
s.b1444=s.b144*y

s.a11=-s.a1

if s.a1<0:
    s.res1=1
else:
    s.res1=0
s.conta21=s.d1*s.c11

s.contamais21=abs(s.conta21)
if s.conta21<0:
    s.sign1='+'
else:
    s.sign1='-'


s.conta2222=s.d1*s.b1
```

```
s.contanovo2222=abs(s.conta2222)
if s.conta2222<0:
    s.sgnovo1='-'
else:
    s.sgnovo1='+'
s.contanovo1=s.contanovo2222*y

s.conta32=s.e1111*s.a11
s.conta42=s.f1*s.a11

s.conta62=s.conta42-s.conta21
s.esconder1=s.f1*s.a1-s.d1*s.c1

s.conta25=s.d1*s.b1*y

s.contanovo2=s.a11*s.e1*y
s.conta52=s.d1*s.b1*y+s.a11*s.e1*y
s.conta53=s.d1*s.b1+s.a11*s.e1
s.conta111=s.c11+s.b1*s.cor12

if s.esconder1==1:
    s.card2='%'
else:
    s.card2=''
```

Exercício 9

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_009}{E97H30_Sistema2Eqs_009}
\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }
Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados
E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares;  Classificação de sistemas; Sistemas de duas
equações a duas incógnitas;  sistema possível e determinado

SIACUAstart
level=3;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
   concepts = [(5251, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Substituindo variáveis

```
Resolve analiticamente o sistema:
       $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle g1(mem11)=mem12\\
       \\
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$
e indica o seu  conjunto solução.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$  S= \displaystyle \left\{
\left(cor11,cor12\right) \right\} $$ </choice>
   <choice> $$  S= \displaystyle
\left\{  \left(err11,err12\right) \right\} $$ </choice>
   <choice> $$  S=
\displaystyle \left\{  \left(err21,err22\right) \right\} $$ </choice>
<choice> $$  S= \displaystyle \left\{  \left(err31,err32\right) \right\} $$
</choice>
   </multiplechoice>
Começamos por colocar o sistema na forma canónica.
    $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle g1(mem11)=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right. \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle conta1=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.$$
De seguida, resolve-se a segunda equação em ordem a $x$.
   $$\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle conta1=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
```

```
\end{array} \right.$$
Vamos agora substituir o valor de $x$ na primeira
equação e resolver essa equação em ordem a $y$.
   $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle ga11 \times cor11@() sgn1
gb12y=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
memaux1=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
       \end{array}
\right.
       card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle gb11y=mem12 sgn2 res21\\
       card1\\
card1\displaystyle x=cor11
       card1\end{array} \right.
card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle gb11y=mudamembro1\\
       card1\\
       card1\displaystyle
x=cor11
       card1\end{array} \right. \\
       \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle y=cor12\\
       \\
\displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.
       $$
   Logo, o conjunto solução do sistema é
   $$ S=  \displaystyle  \left\{ \left(cor11,cor12\right) \right\} $$ .
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_009(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')

        #defining the parameters of the system
        s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.c1=ur.iunif(-6,6)
        s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
        s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
        s.g1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])
       #teste variaveis
        s.teste11=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1
        s.teste12=s.f1*s.g1*s.b1
        s.teste21=s.f1*s.b1
        s.teste31=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1
        s.teste32=s.g1*s.c1*s.d1-s.a1*s.f1*s.g1^2
        if s.teste11==s.teste12 or s.teste21==s.teste11 or
            s.teste31==s.teste32:
             s.a1=11

        #defining the equations
        s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
        s.mem12=s.c1
        s.mem21=s.d1*x
        s.mem22=s.f1

    def solve(s):
        #Correct answer
        s.aux11=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1
        s.aux12=s.d1*s.g1*s.b1
        s.cor12=s.aux11/s.aux12
        s.cor11=s.f1/s.d1
        #1 wrong answer
        s.err11=s.cor12
        s.err12=s.cor11
        #2 wrong answer
        s.err21=s.cor12
        s.auxe32=s.b1*s.d1
        s.err22=s.aux11/s.auxe32
        #3 wrong answer
        s.err31=s.err22
        s.err32=s.err21

        #Resolucao

        s.conta1=s.g1*s.a1*x+s.g1*s.b1*y
        s.ga11=s.g1*s.a1
        s.gb11=s.g1*s.b1
        s.gb12=abs(s.gb11)
```

```
if s.gb11<0:
    s.sgn1='-'
else:
    s.sgn1='+'
s.gb12y=s.gb12*y
s.res1=s.cor11*s.ga11
s.gb11y=s.gb11*y
s.b1y=s.b1*y
s.afd1=s.g1*s.a1*s.f1/s.d1
s.memaux1=s.afd1 + s.gb11*y
s.mudamembro1=s.c1-s.res1
s.res2=-s.res1
s.res21=abs(s.res2)
if s.res2 <0:
    s.sgn2='-'
else:
    s.sgn2='+'
if s.c1==0:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''
```

Exercício 10

%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30_Sistema2Eqs_010}{E97H30_Sistema2Eqs_010}
\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }
Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas incógnitas possíveis e determinados

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado
SIACUAstart

level=2; slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3

concepts = [(5251,
1)]

SIACUAend

%PROBLEM Substituindo variáveis

Resolve, pelo método de substituição, o seguinte sistema de equações:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}

```
       \displaystyle g1(mem11)=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$
Qual dos pares ordenados (x,y) seguintes é solução deste sistema?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
   <choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
   </multiplechoice>
<showone res1>
   <thisone>
Começamos por colocar o sistema na forma canónica.
    $$ \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
g1(mem11)=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array}
\right. \Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle conta1=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.$$
De seguida, resolve-se a segunda equação em ordem a $y$.
    $$ \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
conta1=mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.$$
```

```
Substituindo o valor de $y$ na primeira equação, resolve-se essa
equação em ordem a $x$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle novoga1 sgn1 gb12 \times cor12@() =mem12\\
       \\
\displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle novoga1 sgn2 res2
=mem12\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle novoga1 =mem12 sgn3 res33\\
       card1\\
card1\displaystyle y=cor12
       card1\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
novoga1 = mudamembro1\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
\end{array} \right.
       \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle x=cor11\\
       \\
\displaystyle y=cor12
       \end{array} \right. $$
Logo, o par ordenado que corresponde à solução do sistema é
 $$(x,y)=\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$
</thisone>
<thisone>
Começamos por colocar o sistema na forma canónica.
    $$ \displaystyle
```

```
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle g1(mem11)=mem12\\
       \\
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right. \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle conta1=mem12\\
\\
       \displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.$$
Substituindo o valor de $y$ na primeira equação, resolve-se essa equação em
ordem a $x$.
   $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
novoga1 sgn1 gb12 \times cor12@() =mem12\\
       \\
       \displaystyle
y=cor12
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle novoga1 sgn2 res2 =mem12\\
\\
       \displaystyle y=cor12
       \end{array} \right.
card1\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card1\displaystyle novoga1 =mem12 sgn3 res33\\
       card1\\
card1\displaystyle y=cor12
       card1\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
novoga1 = mudamembro1\\
       \\
       \displaystyle y=cor12
\end{array} \right.
       \Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
```

```
        \displaystyle x=cor11\\
        \\
\displaystyle y=cor12
        \end{array} \right.
        $$
Logo, o par ordenado que corresponde à solução do sistema é
 $$(x,y)=\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$
   </thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_010(Exercise):
       def make_random(s):
           x=var('x')
           y=var('y')

           #defining the parameters of the system
           s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.c1=ur.iunif(-6,6)
           s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.f1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
           s.g1=ur.iunif_nonset(-9,9,[-1,0,1])

           #teste variaveis
           s.teste11=s.f1
           s.teste12=s.e1*s.f1-s.e1^2
           if s.teste11==s.teste12:
               s.e1=11

           #defining the equations
           s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
           s.mem12=s.c1
           s.mem21=s.e1*y
           s.mem22=s.f1

       def solve(s):
           #Correct answer
           s.aux11=s.c1*s.e1-s.g1*s.b1*s.f1
           s.aux12=s.g1*s.a1*s.e1
           s.cor11=s.aux11/s.aux12
           s.cor12=s.f1/s.e1
           #1 wrong answer
           s.err11=s.c1-s.g1*s.b1*s.f1+s.g1*s.b1*s.e1-s.g1*s.a1
           s.err12=s.f1-s.e1
           #2 wrong answer
```

```
s.auxe21=s.c1*s.e1+s.g1*s.b1*s.f1
s.auxe212=s.g1*s.a1*s.e1
s.err21=s.auxe21/s.auxe212
s.err22=s.cor12
#3 wrong answer
s.auxe31=s.c1*s.e1-s.b1*s.f1
s.auxe32=s.g1*s.a1*s.e1
s.err31=s.auxe31/s.auxe32
s.err32=s.cor12

#Resolucao
s.conta1=s.g1*s.a1*x+s.g1*s.b1*y
s.res1=s.cor12*s.g1*s.b1
s.res2=abs(s.res1)
if s.res1<0:
    s.sgn2='-'
else:
    s.sgn2='+'
s.mudamembro1=s.c1-s.res1
s.gb11=s.g1*s.b1
s.gb12=abs(s.gb11)
if s.gb11<0:
    s.sgn1='-'
else:
    s.sgn1='+'
s.res3=s.g1*s.b1*s.cor12
s.res33=abs(s.res3)
if s.res3<0:
    s.sgn3='+'
else:
    s.sgn3='-'
s.novoga1=s.g1*s.a1*x
s.a1x=s.a1*x
if s.e1==1:
    s.res1=1
else:
    s.res1=0
if s.c1==0:
    s.card1='%'
else:
    s.card1=''
```

Exercício 11

```
%Desenha um cabeçalho para o exercício
\cfonte{E97H30\_Sistema2Eqs\_011}{E97H30_Sistema2Eqs_011}
\noindent\textbf{\%SUMMARY Equações e inequações; Sistemas de equações }
Resolução gráfica e analítica de sistemas de duas equações a duas
incógnitas possíveis e determinados
```

E97H30 Equations and inequalities:
Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas

Palavras chave:
Sistemas de equações lineares; Classificação de sistemas; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; sistema possível e determinado
SIACUAstart
level=3; slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
concepts = [(5251,
1)]
SIACUAend

%PROBLEM Substituindo variáveis

Resolve analiticamente o seguinte sistema de equações:
$$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle g1(mem11)=mem12\\
\\
\displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.$$
Qual é o par ordenado que corresponde à solução do sistema?

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice> $$\displaystyle
\left(cor11,cor12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle
\left(err11,err12\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle
\left(err21,err22\right)$$ </choice>
<choice> $$\displaystyle
\left(err31,err32\right)$$ </choice>
</multiplechoice>
Começamos por desembaraçar de parênteses.
$$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle g1(mem11)=mem12\\
\\

```
\displaystyle mem21=mem22
       \end{array} \right.
       \Leftrightarrow
\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
contaparenteses1=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.
       $$
   De seguida, resolve-se a segunda equação em
ordem a $x$.
    $$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
contaparenteses1=mem12\\
       \\
       \displaystyle mem21=mem22
\end{array} \right.
       card1\Leftrightarrow \displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       card1\displaystyle contaparenteses1=mem12\\
card1\\
       card1\displaystyle d11=f1 sgn1 e11
       card1\end{array}
\right.
       card5\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card5\displaystyle contaparenteses1=mem12\\
       card5\\
card5\displaystyle d11=conta1
       card5\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle
contaparenteses1=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
\end{array} \right.
       $$
Vamos agora substituir o valor de $x$
```

```
na primeira equação e resolver essa equação em ordem a $y$.
   $$\displaystyle
\left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle  ga1 \times cor11@() sign9 gb12
=mem12\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.
card3\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card3\displaystyle conta2 sign9 gb12=mem12\\
       card3\\
card3\displaystyle x=cor11
       card3\end{array} \right.
card3\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card3\displaystyle gb13 =mem12 sgn2 conta3\\
       card3\\
card3\displaystyle x=cor11
       card3\end{array} \right.
\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
       \displaystyle gb13
=conta4\\
       \\
       \displaystyle x=cor11
       \end{array} \right.
card2\Leftrightarrow \displaystyle \left\{\begin{array}{l}
card2\displaystyle y=cor12\\
       card2\\
       card2\displaystyle x=cor11
card2\end{array} \right.
       $$

   Logo, o par ordenado que
corresponde à solução do sistema é $$ (x,y)=\displaystyle
\left(cor11,cor12\right) $$
```

Programação

```
class E97H30_Sistema2Eqs_011(Exercise):
```

```
def make_random(s):
    x=var('x')
    y=var('y')

    #defining the parameters of the system
    s.a1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.b1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.c1=ur.iunif(-6,6)
    s.d1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.e1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0])
    s.f1=ur.iunif(-9,9)
    s.g1=ur.iunif_nonset(-9,9,[0,1])

    #teste variaveis
    s.teste11=s.f1*s.g1*s.b1-s.e1*s.g1*s.b1
    s.teste12=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1+s.g1*s.a1*s.e1
    s.teste21=s.g1*s.a1*s.e1
    s.teste22=s.e1
    s.teste31=s.g1*s.b1*s.f1-s.e1*s.g1*s.b1
    s.teste32=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1+s.e1
    if s.teste11==s.teste12 or s.teste21==s.teste22 or
        s.teste31==s.teste32:
         s.e1=11

    #defining the equations
    s.mem11=s.a1*x+s.b1*y
    s.mem12=s.c1
    s.mem21=s.d1*x+s.e1
    s.mem22=s.f1

def solve(s):
   #Correct answer
    s.aux11=s.f1-s.e1
    s.aux112=s.d1
    s.cor11=s.aux11/s.aux112
    s.aux121=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1*s.f1+s.g1*s.a1*s.e1
    s.aux122=s.b1*s.d1*s.g1
    s.cor12=s.aux121/s.aux122
    #1 wrong answer
    s.err11=s.cor12
    s.err12=s.cor11
    #2 wrong answer
    s.err21=s.cor11
    s.auxe221=s.c1*s.d1-s.g1*s.a1
```